



De Notre Dame au Panthéon

La modélisation mécanique pour la conservation et la compréhension du patrimoine monumental

Paolo VANNUCCI



UVSQ, Versailles, 21 Mars 2022

Avant-de commencer: les remerciements

- Ce séminaire concerne des recherches faites sur le Panthéon de Rome et sur Notre Dame à partir de 2015
- Certaines de ces recherches ont été faites en collaboration avec [F. Masi](#), maintenant à l'Université de Sidney, et [I. Stefanou](#), EC Nantes, ou avec [B. Desmorat](#), Institut d'Alembert.
- La recherche sur l'action du vent est une collaboration avec l'I2M ([E. Panettieri](#) et [M. Montemurro](#)) et l'Université de Florence ([C. Mannini](#), [T. Massai](#), [M. Ferrucci](#)); l'aide de [L. Frèrejean](#) (LMV) a été dans cette aventure très précieuse.
- Mes remerciements vont à tous ces amis et collaborateurs.

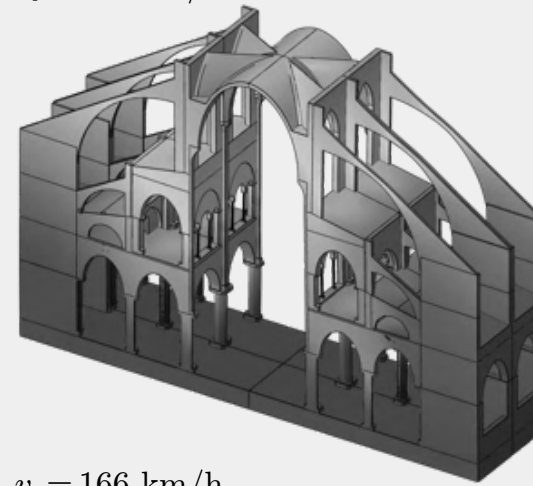
Plan

1. Mécanique et monuments
2. Actions extrêmes: explosions
3. Actions extrêmes: vent
4. La mécanique comme instrument d'archéologie synthétique

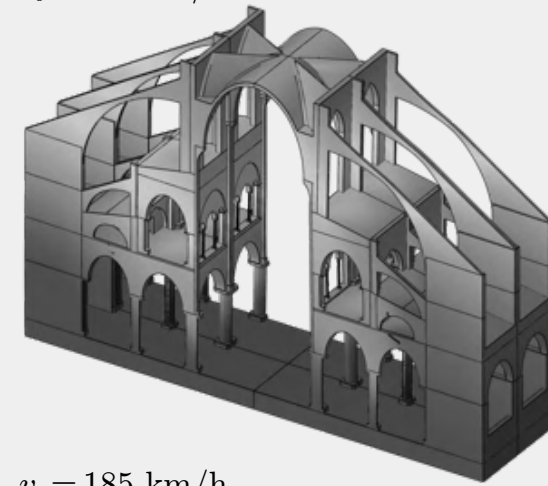
1

Mécanique et monuments

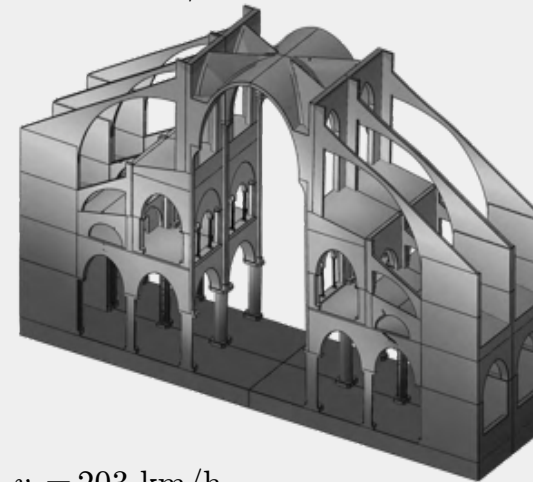
$v_o = 129 \text{ km/h}$



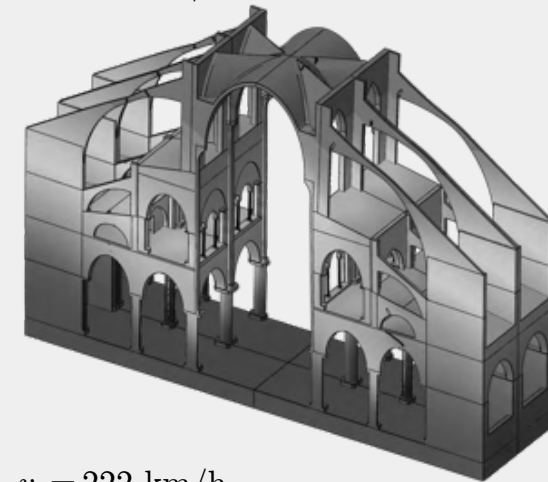
$v_o = 148 \text{ km/h}$



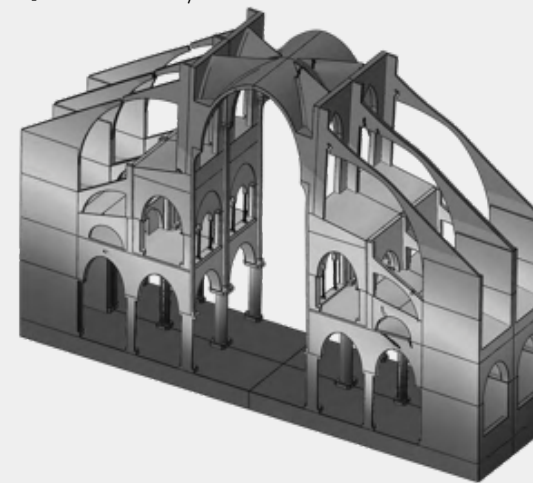
$v_o = 166 \text{ km/h}$



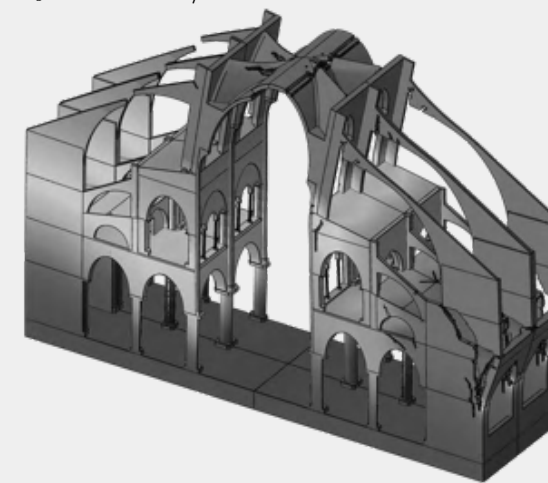
$v_o = 185 \text{ km/h}$



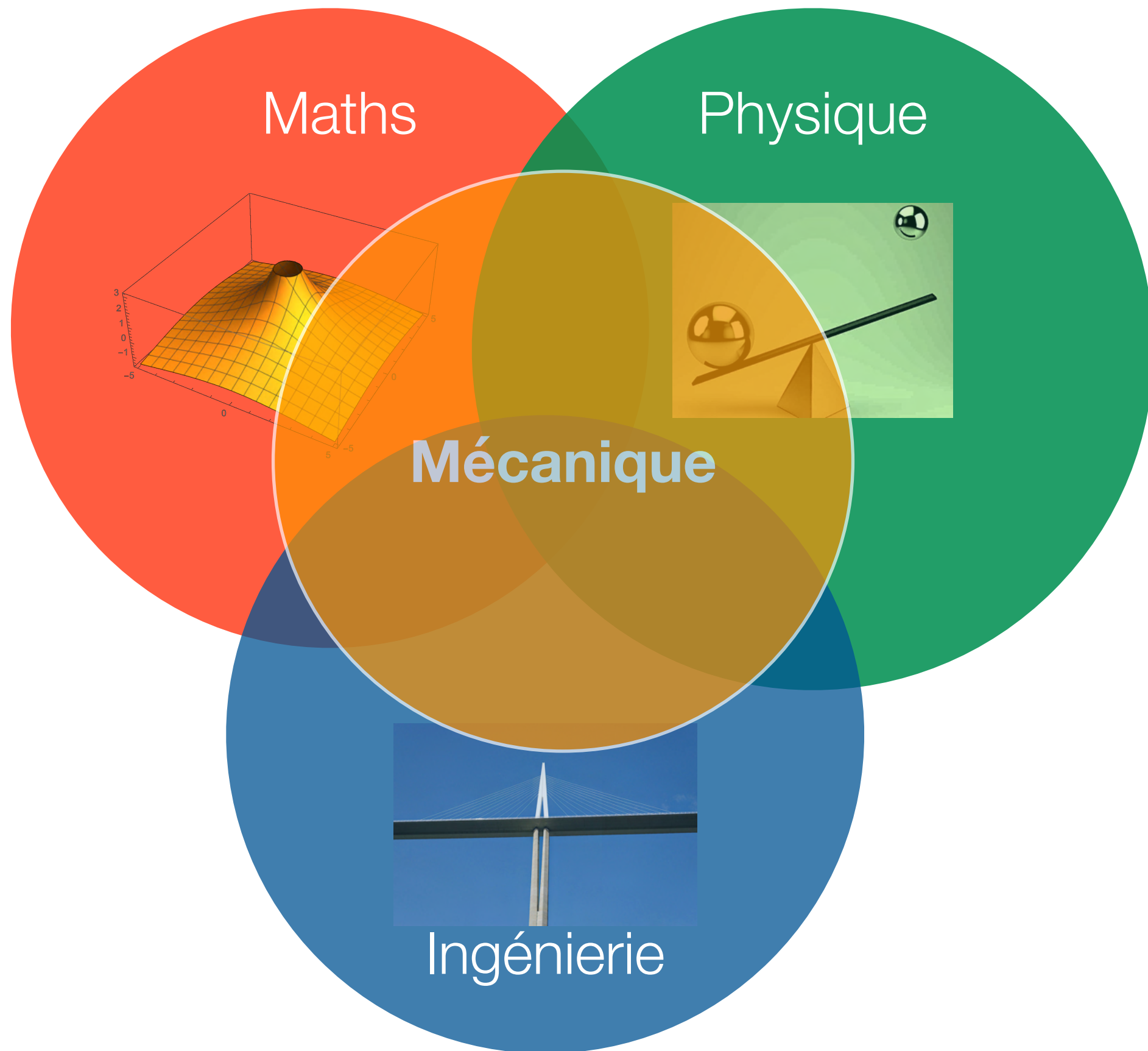
$v_o = 203 \text{ km/h}$



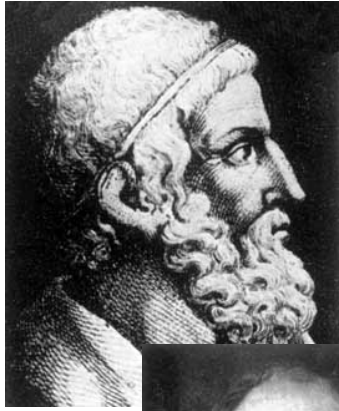
$v_o = 222 \text{ km/h}$



La mécanique: c'est quoi?



Les mêmes pères... et mères



Archimède

C. A. Truesdell



G. Galilei



E. Noether



I. Newton



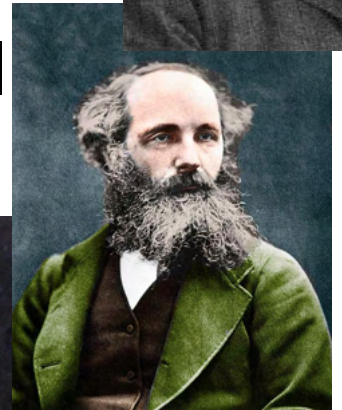
V. Volterra



L. Euler



J. C. Maxwell



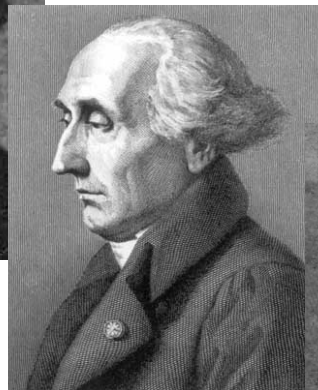
W. R. Hamilton



J. Le Rond d'Alembert



G. L. De Lagrangia



A. L. Cauchy



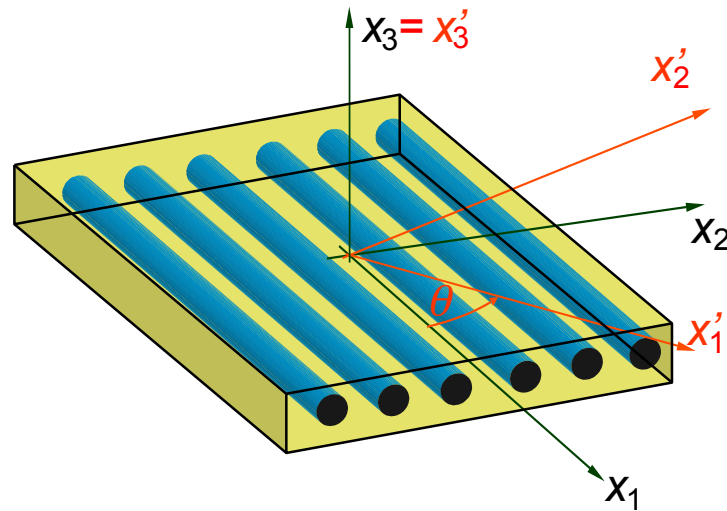
S. Germain



De quoi s'occupe-t-elle la mécanique?



Structures



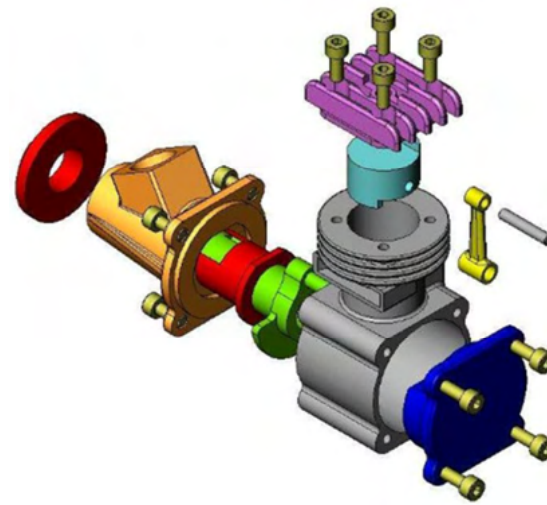
Matériaux



Fluides



Acoustique



Mécanismes



Robotique



Energie



Environnement



Biologie

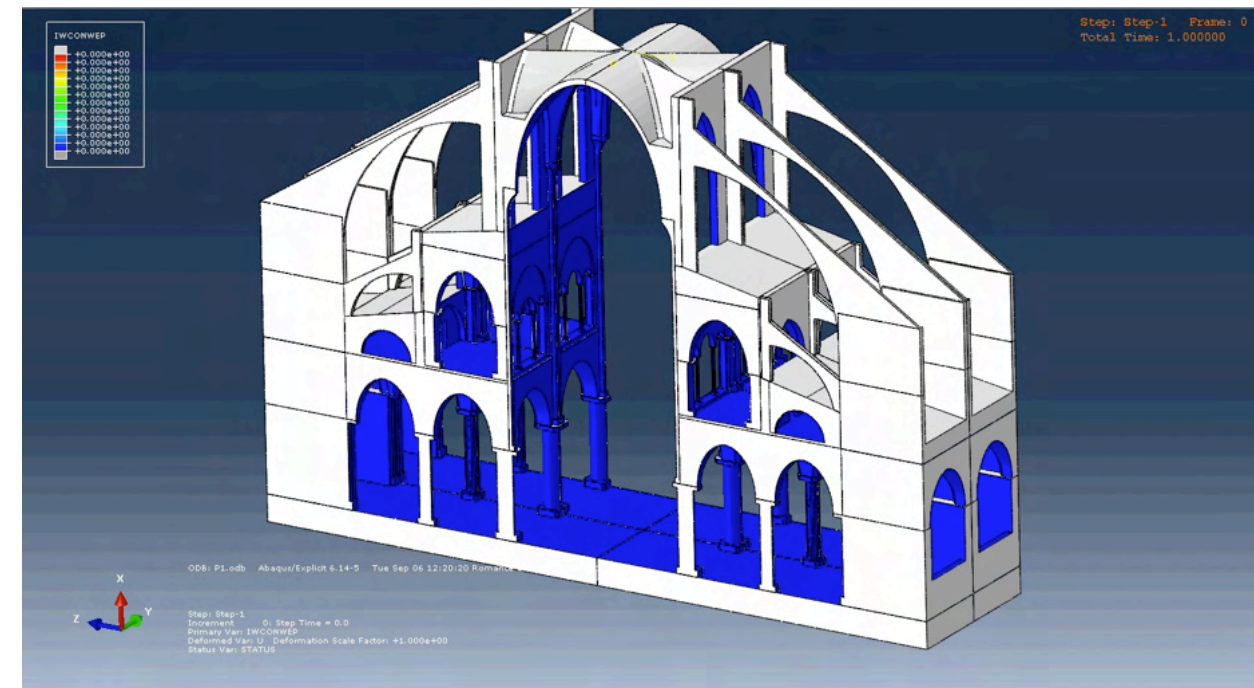
La mécanique et le patrimoine

- Plus récemment, la mécanique participe à l'étude du patrimoine, d'abord avec des études sur les **structures**, plus récemment aussi sur les **peintures** etc.
- La première action dans ce sens concerne le **dome de San Pierre** (1742, R. G. Boscovich, T. Le Sueur, F. Jacquier)



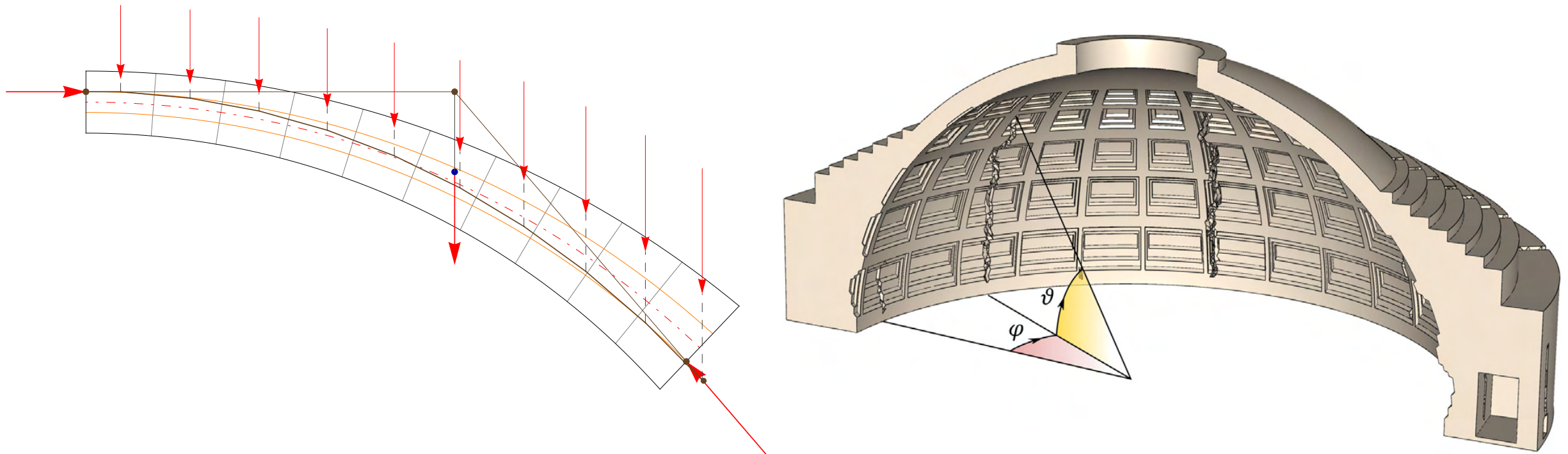
Nos recherches

- Nous avons utilisé la simulation numérique appliquée à la mécanique des structures et des fluides pour différentes études sur le patrimoine
- Objets des recherches:
 - Notre Dame** (2016 JNM, 2016, classifié; 2019 Eng Str, 2021 J Cult Herit, 2022 TEMA, 2022 Int J Arch Herit)
 - Panthéon de Rome** (2018 Eng Str, 2018 Eng Fail An)
 - Statues** (2019 Int J Mech Sc, 2020 J Cult Herit)
 - Voutes** (2020 Eng Str)



Motivations des recherches

- Ces recherches étaient motivées par **deux raisons**:
 - étudier la vulnérabilité des monuments aux **actions extrêmes**: explosions et tempêtes de vent
 - essayer de mieux comprendre la **pensée structurale** et la **connaissance technique** des anciens



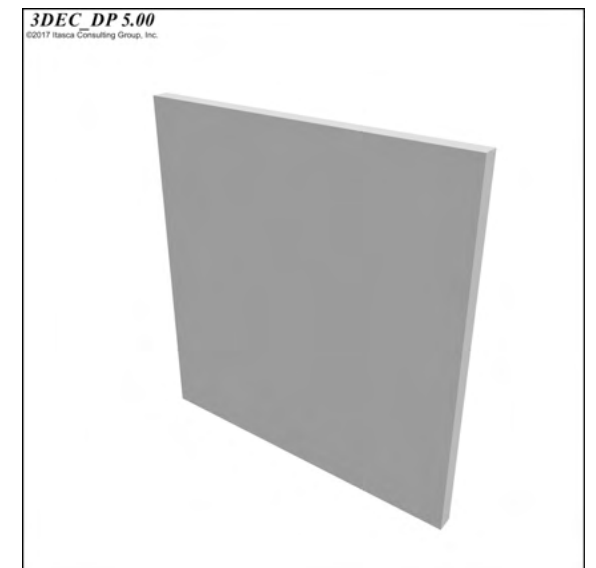
2

Actions extrêmes:
explosions



La menace iconoclaste

- **Objectif de l'étude:** comprendre les mécanismes de ruine et concevoir les protections nécessaires par la simulation numérique des explosions et de leurs effets



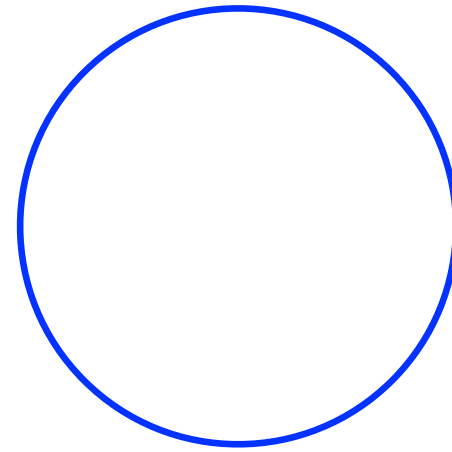
Le Panthéon: un monument emblématique

- Bâti par l'empereur Adrian entre 118 et 128 a. C. c'est probablement l'oeuvre d'[Apollodore de Damas](#)



Le Panthéon, un tribut à Archimède?

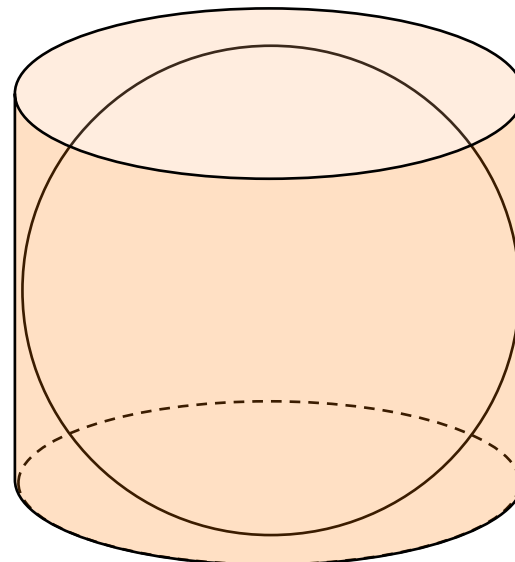
pronaos
Rotonda



The *Rotonda* internal sphere
according to Wilson-Jones

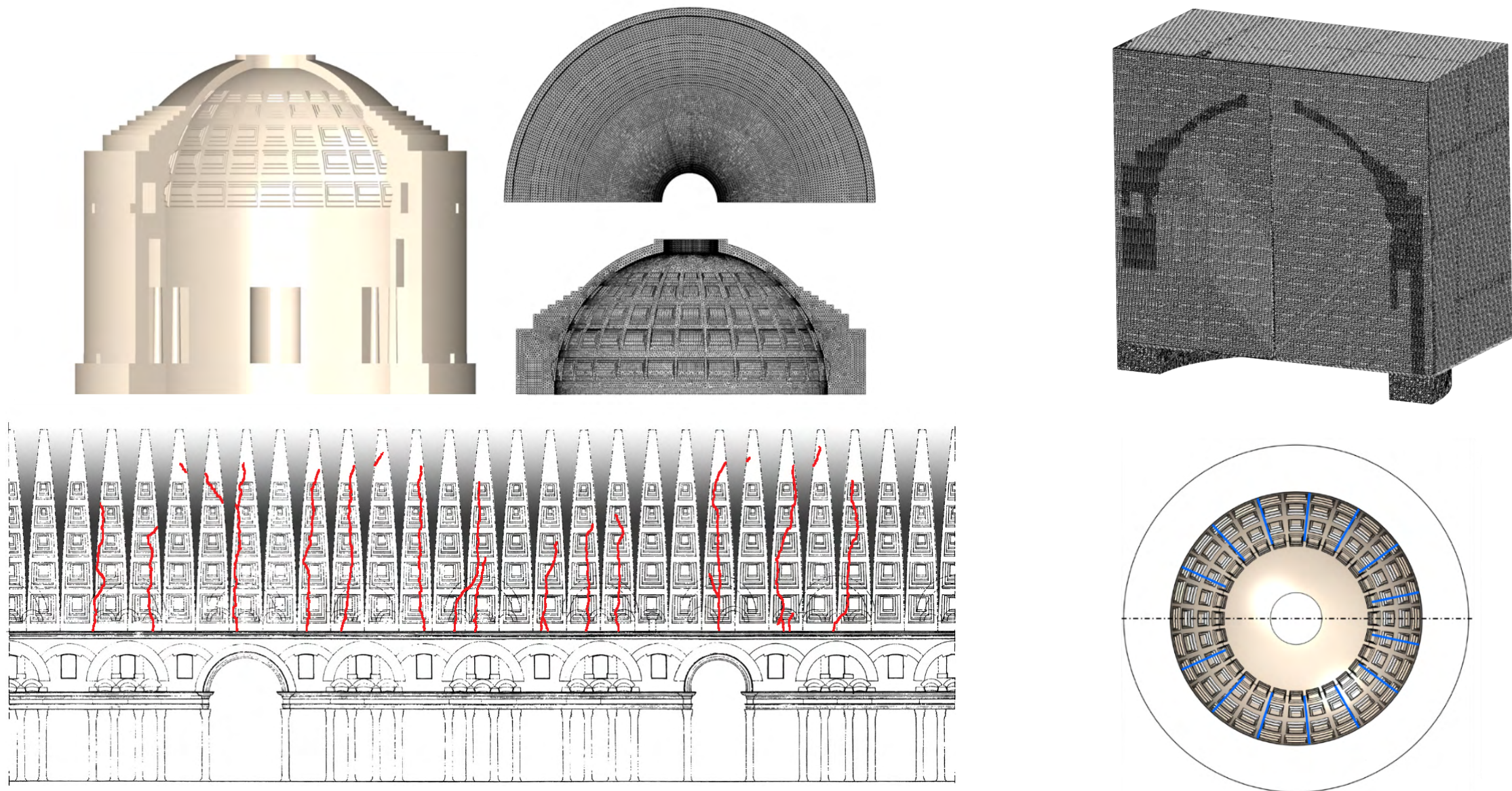
The *Rotonda* internal sphere
according to de Fine Licht

44.55 m

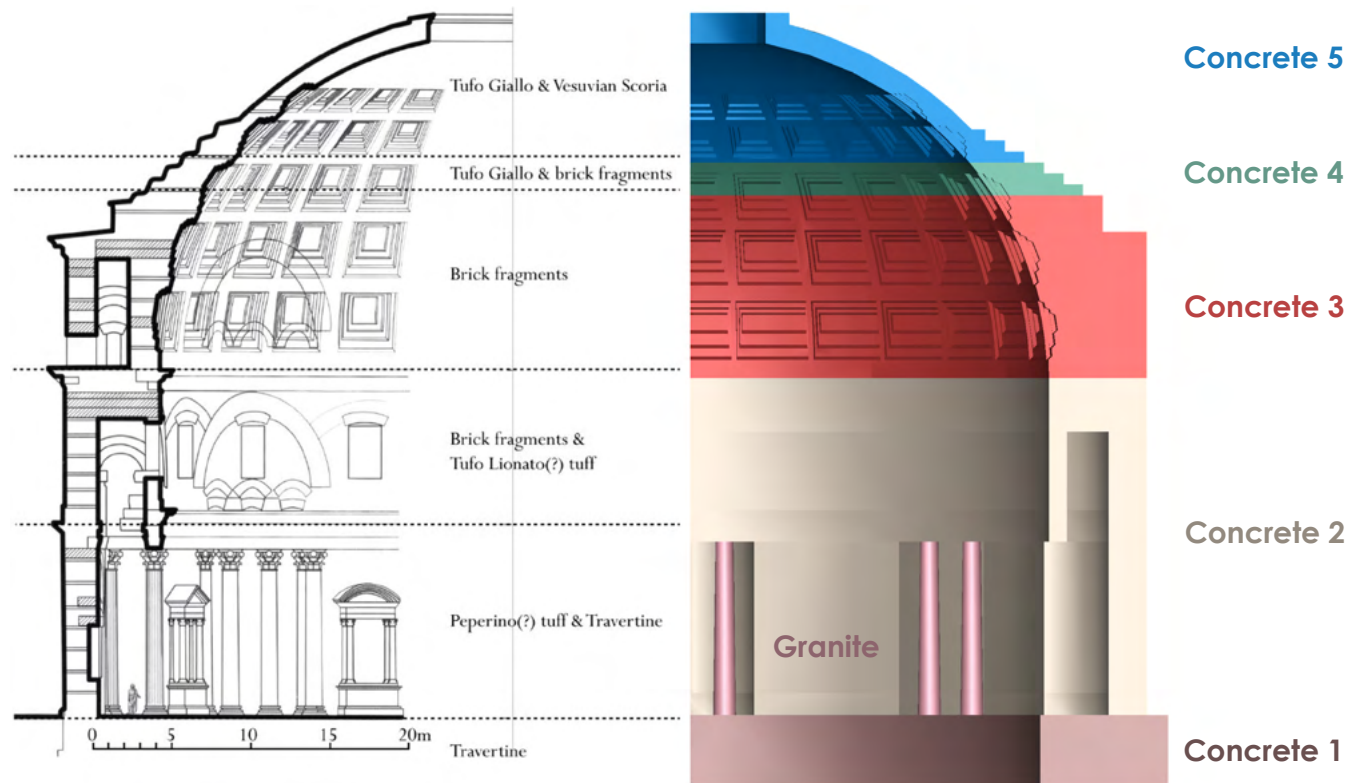


Etude d'une explosion au centre de la *Rotonda*

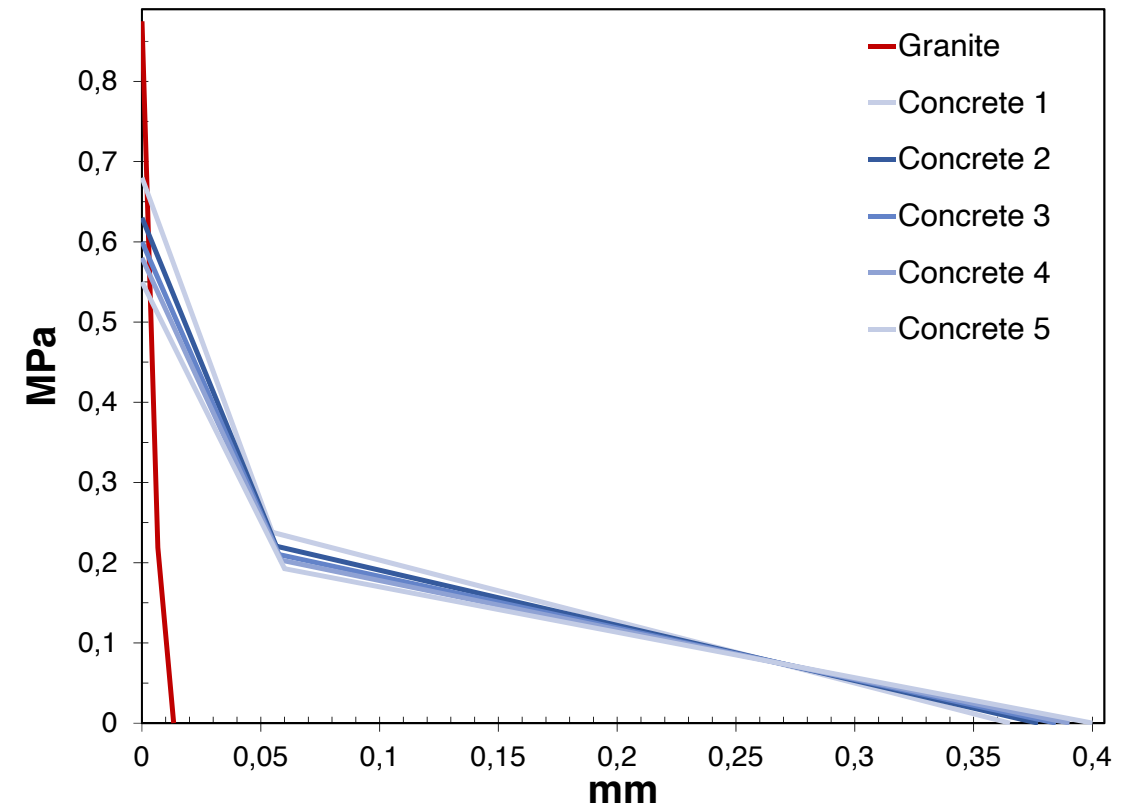
- Simulation: méthode **CEL (Coupled Eulerian Lagrangian)** pour la simulation de l'explosion: volumes finis pour l'air et éléments finis pour la structure
- Au total: 13.14×10^6 dof (10.34×10^6 FV + 2.8×10^6 FE).
- Le modèle FEM comprend les **caissons** et les **14 grandes fissures** du dome



La simulation des matériaux

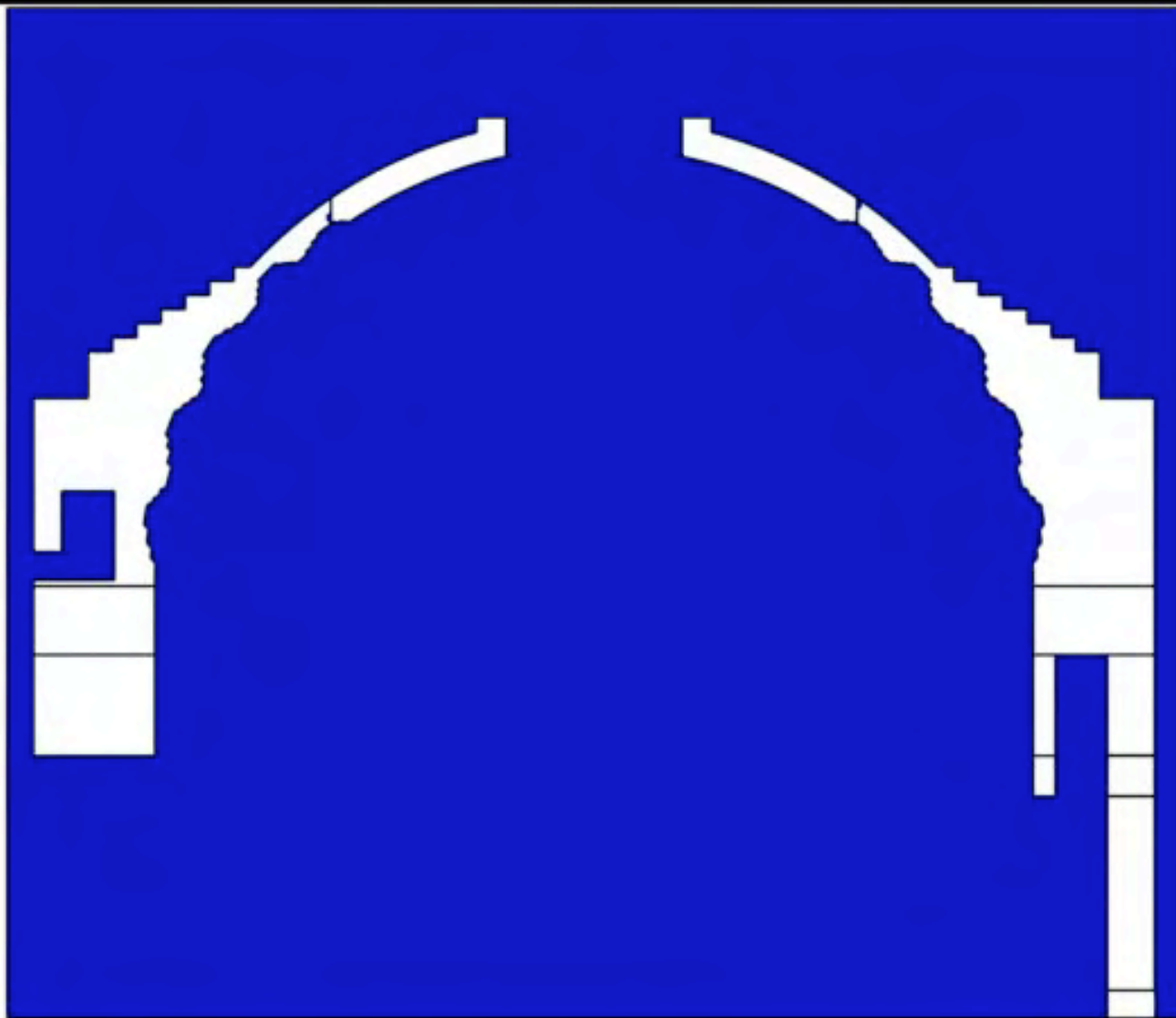
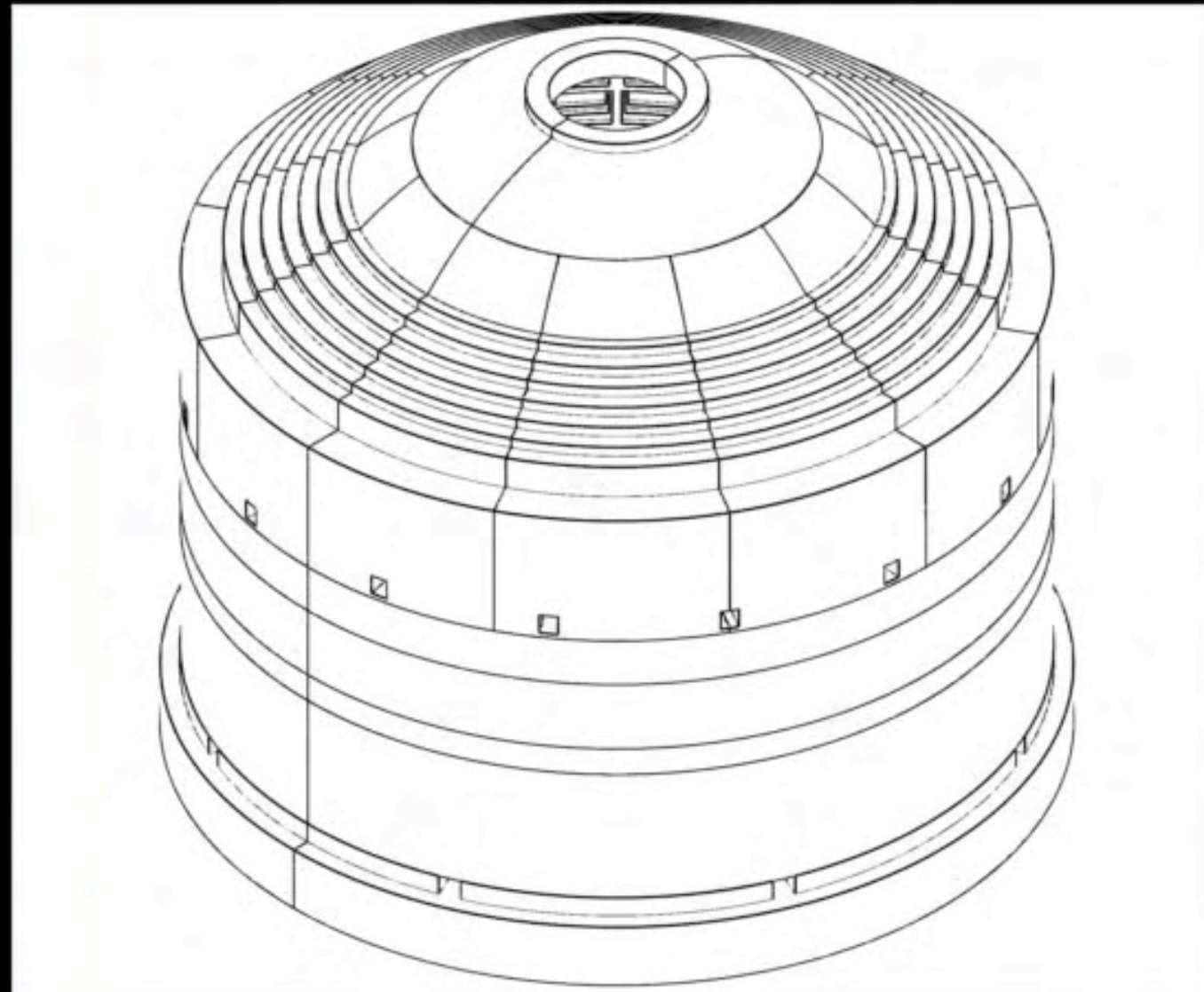


Matériaux	ρ (kg/m ³)	E (GPa)	ν	G_f (J/m ²)	f_t (MPa)
Granite	2500	55.3	0.16	17.5	3.50
Béton 1	2000	13.5	0.20	62.1	0.68
Béton 2	1750	7.0	0.20	59.4	0.63
Béton 3	1600	4.6	0.20	57.7	0.60
Béton 4	1500	3.6	0.20	56.6	0.58
Béton 5	1350	3.0	0.20	55.0	0.55

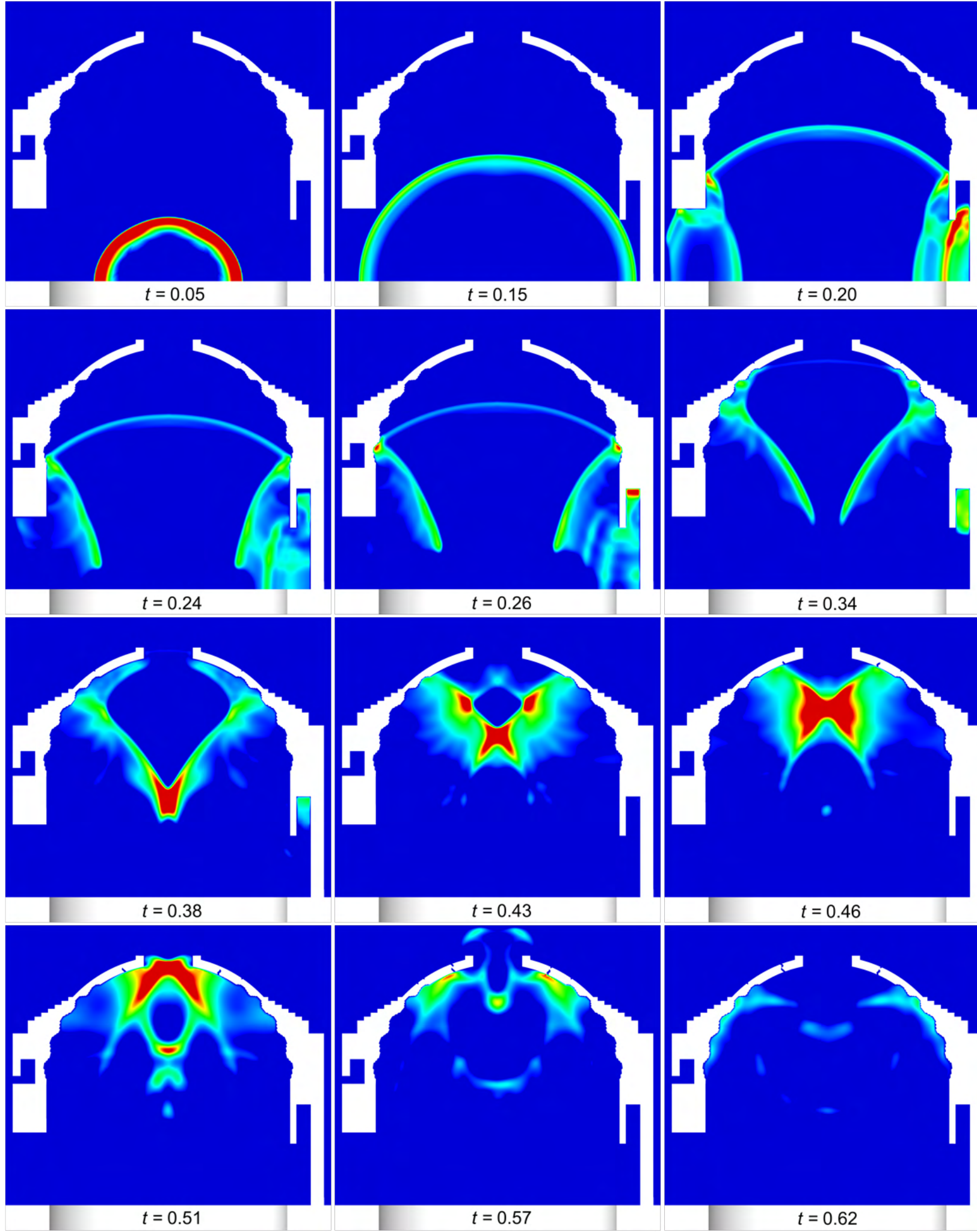
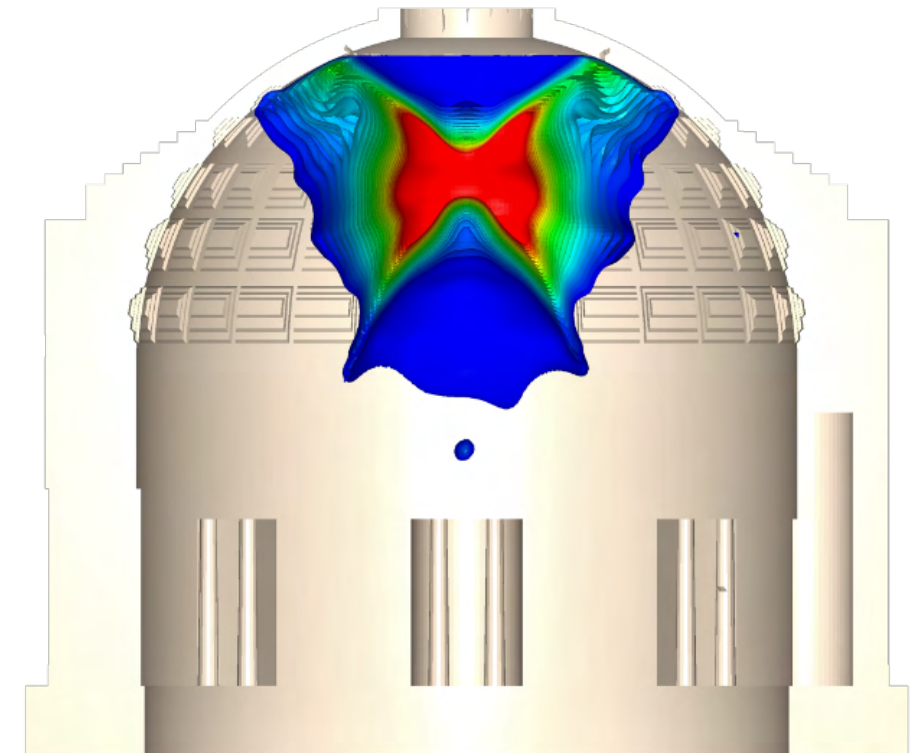
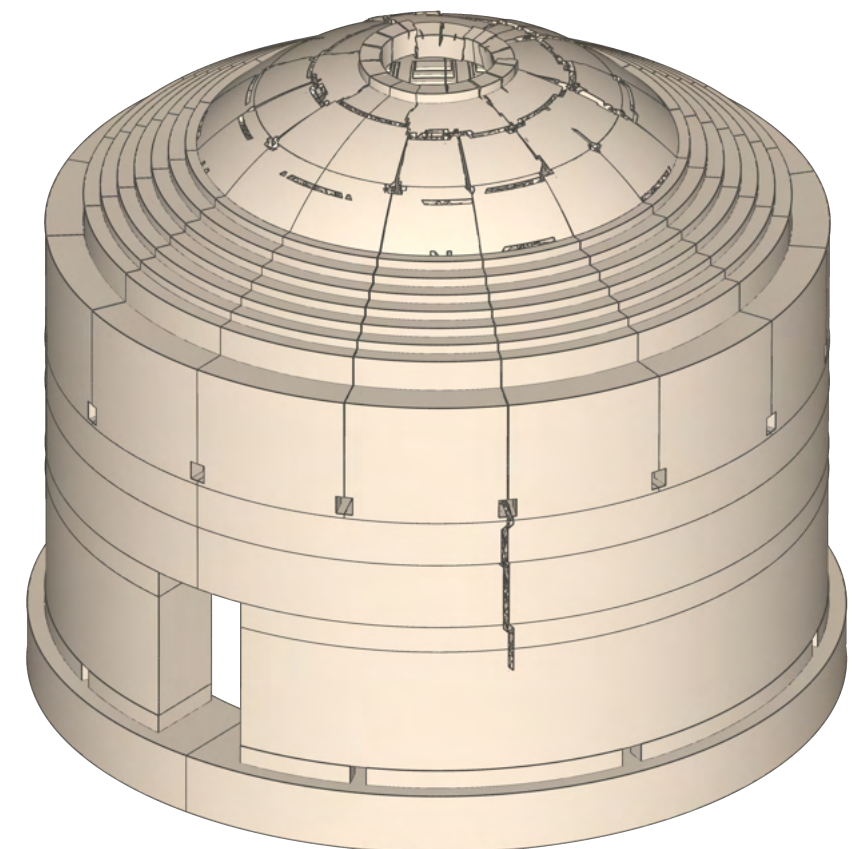


Mécanisme d'action de l'explosion

- La géométrie de la *Rotonda* engendre une focalisation à haute vitesse des ondes de choc, primaires et réfléchies
- Quand la focalisation passe à travers l'oculus, les tractions produites fracturent le dome; le poids fait le reste



- Evolution de la surpression due à l'explosion



3

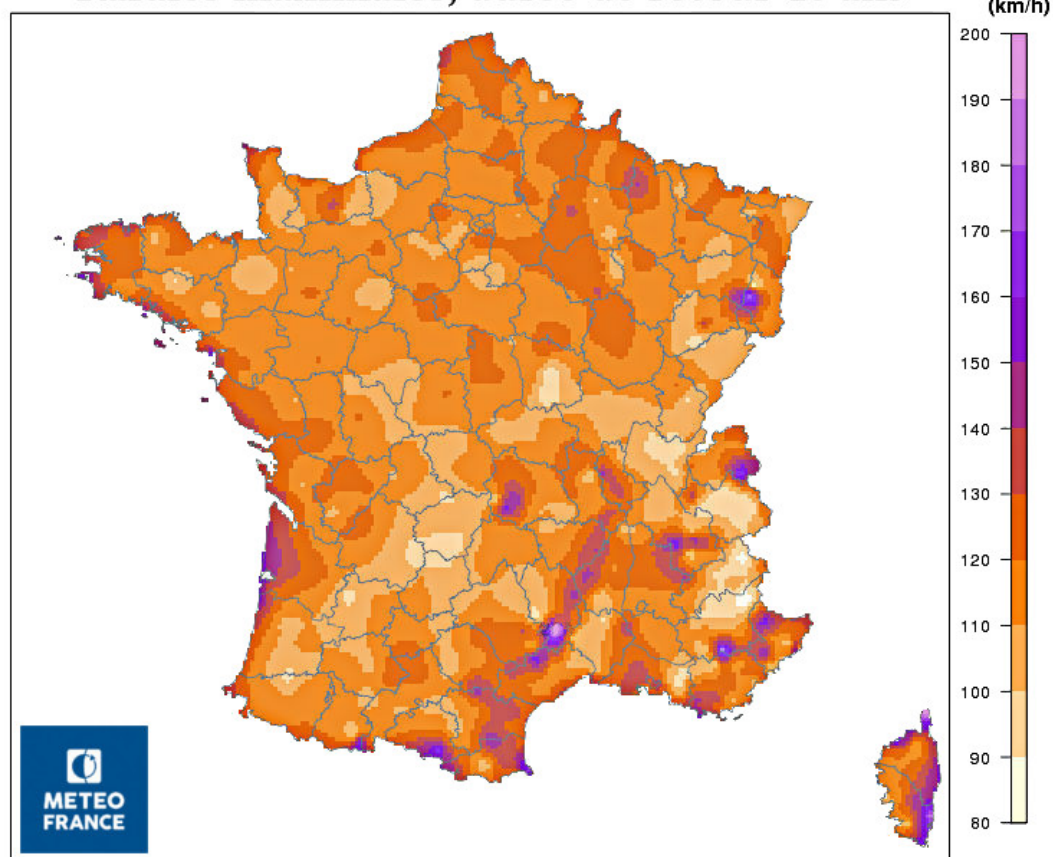
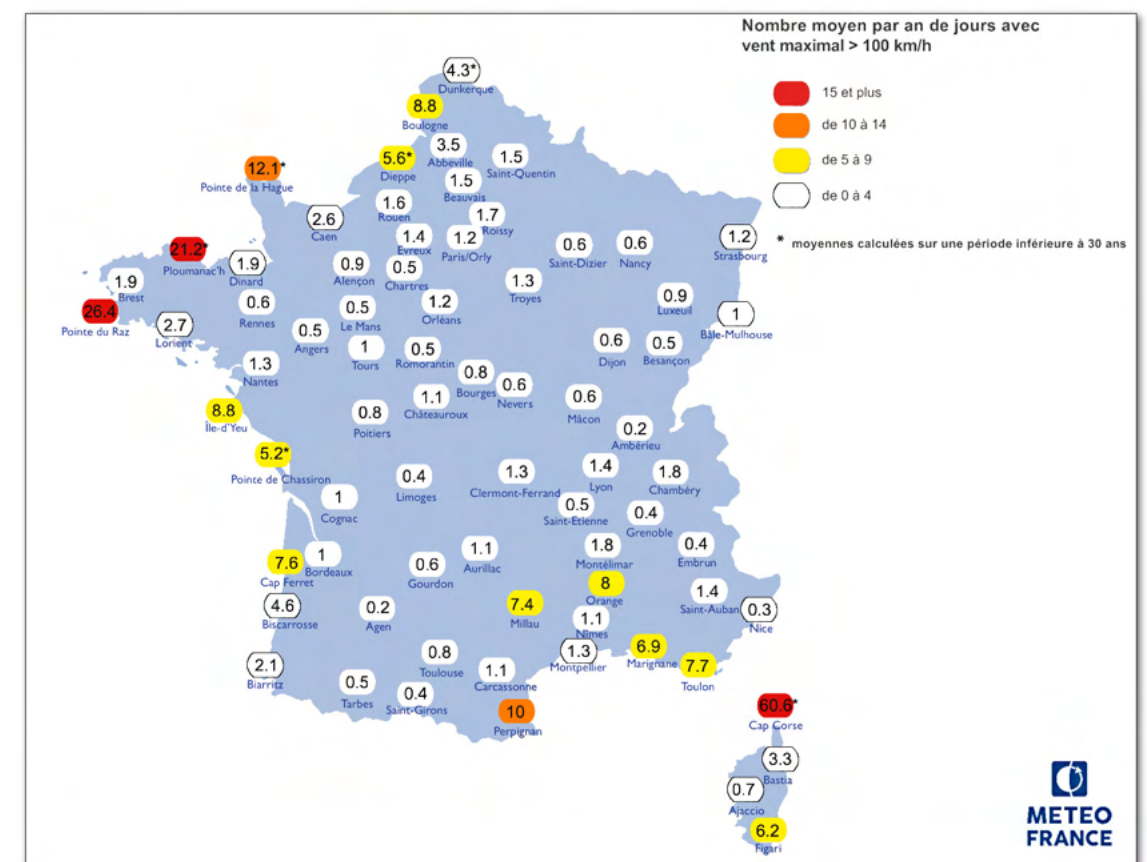
Actions extrêmes:
vent



Motivation de la recherche

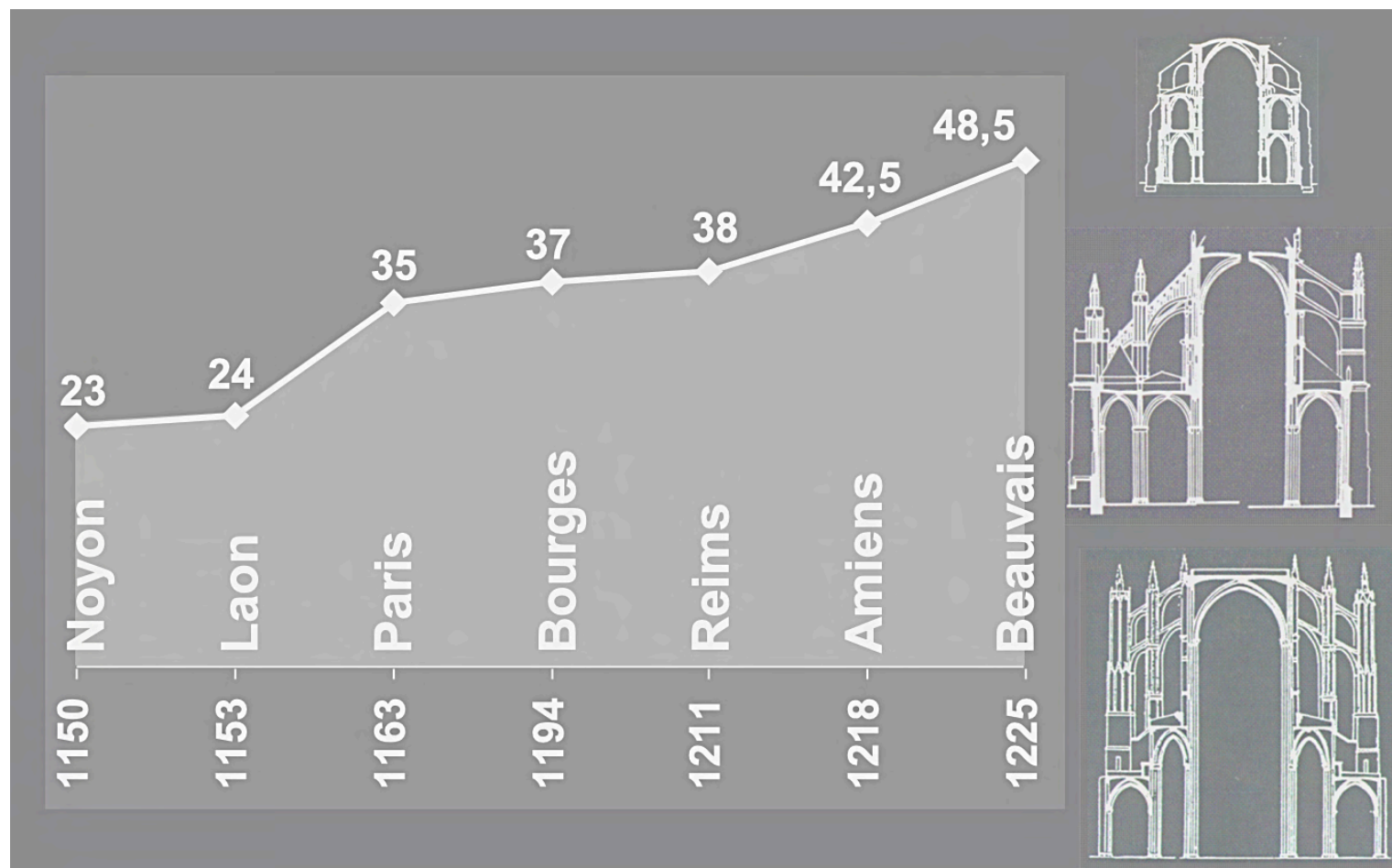
- Le **dérèglement climatique** produit des tempêtes de vent de plus en plus fortes et fréquentes
 - 15 Octobre 1987: **220** km/h à Cap Finisterre
 - 26 Décembre 1999: **169** km/h dans Paris

Rafales maximales, durée de retour 10 ans



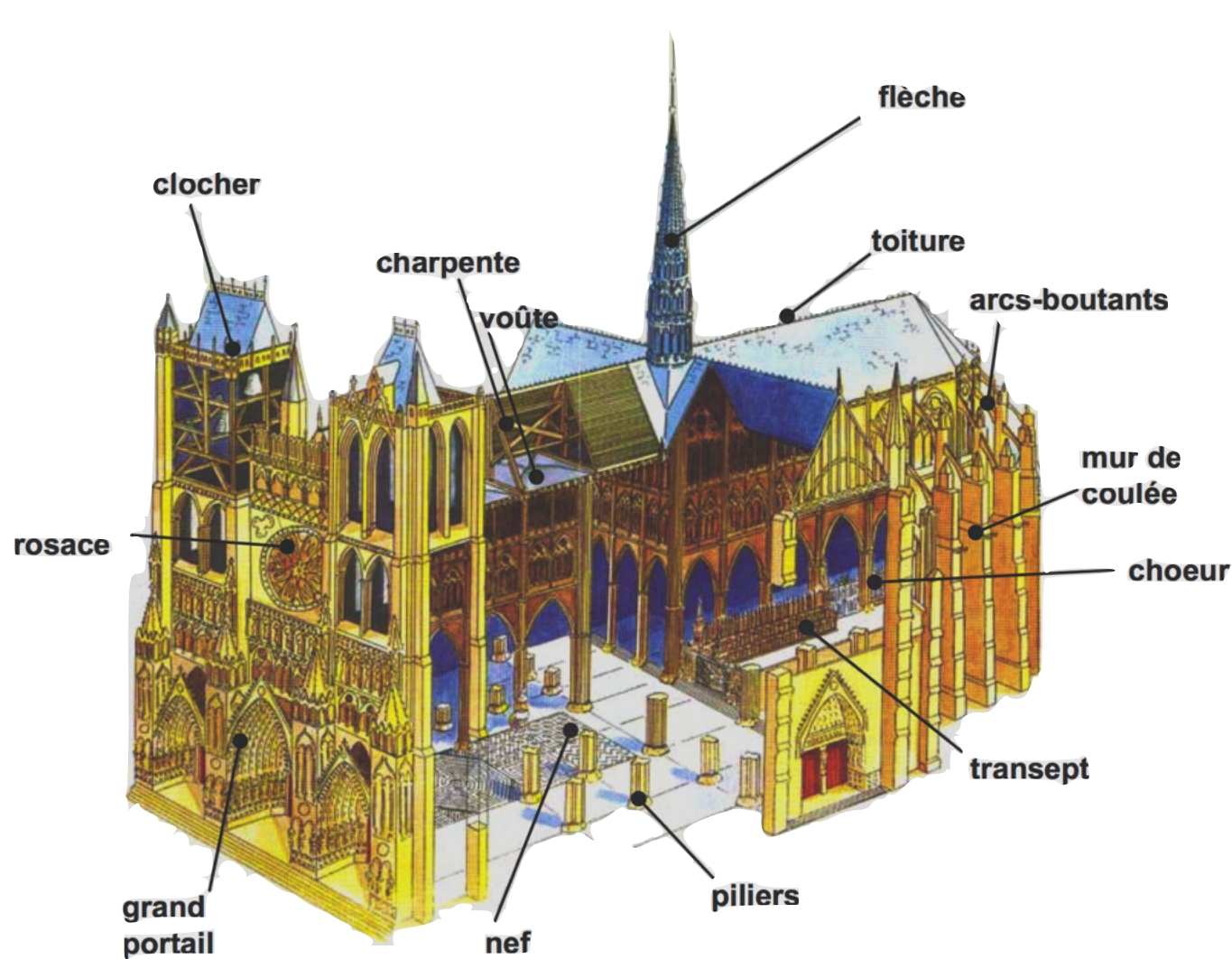
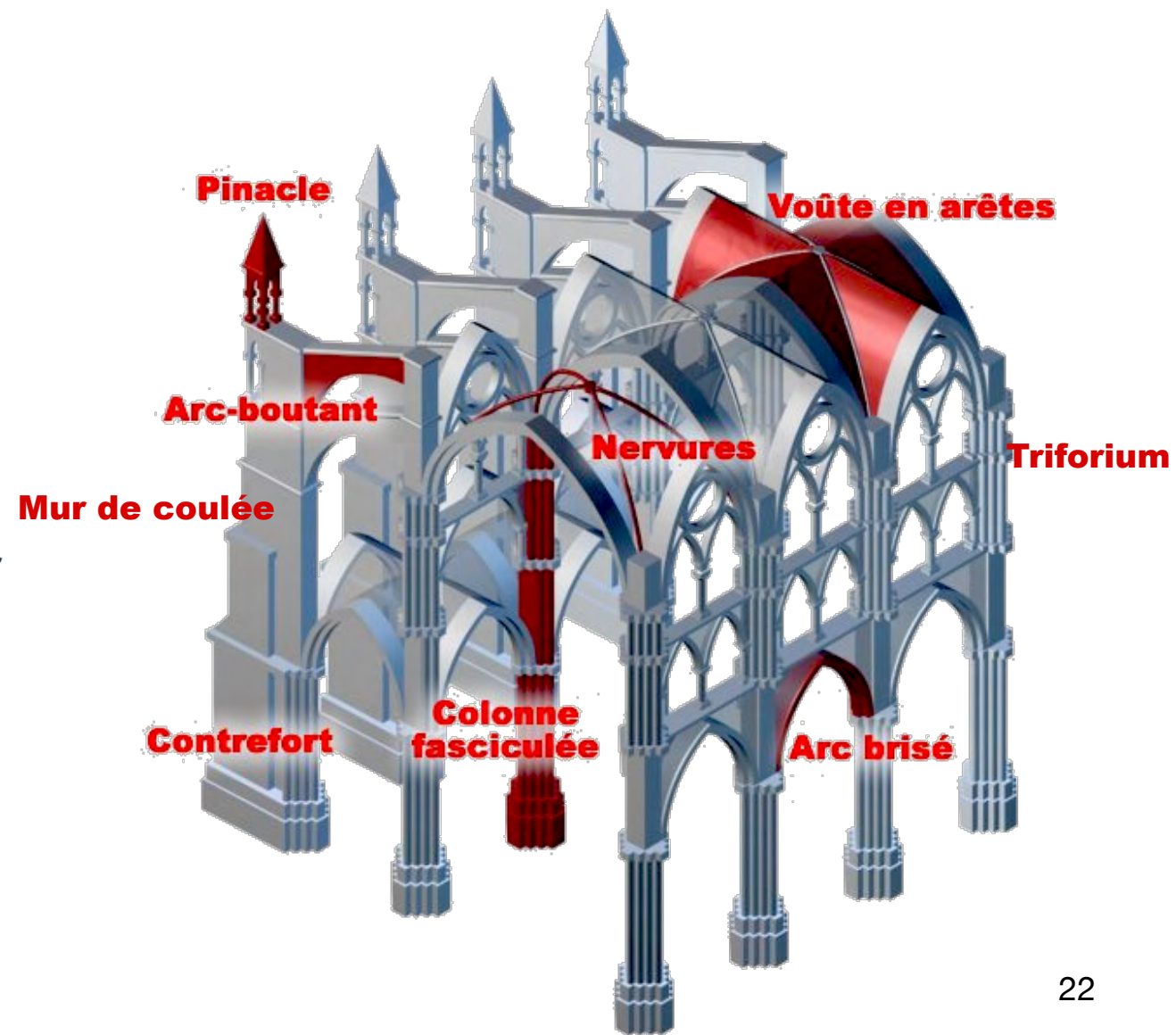
Effets sur les patrimoine bâti

- 1976: clocher de Saint Bonifatius à Leeuwarden (Pays Bas)
- 12 Janvier 2017: la tempête Egon détruit la rosace de la Cathédrale de Soissons
- De par leur hauteur, les cathédrales gothiques sont particulièrement exposées

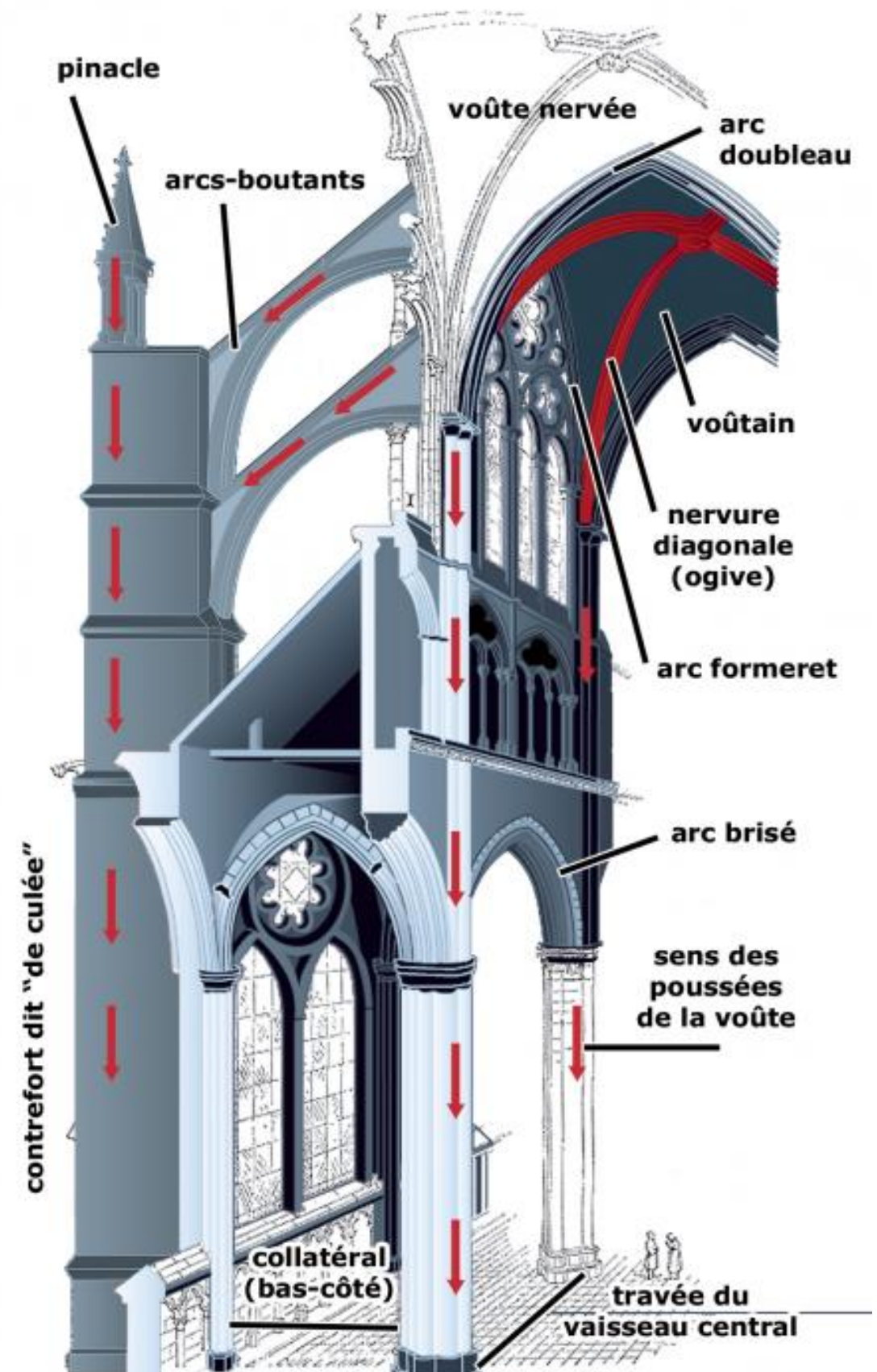


Fonctionnement statique d'une cathédrale gothique

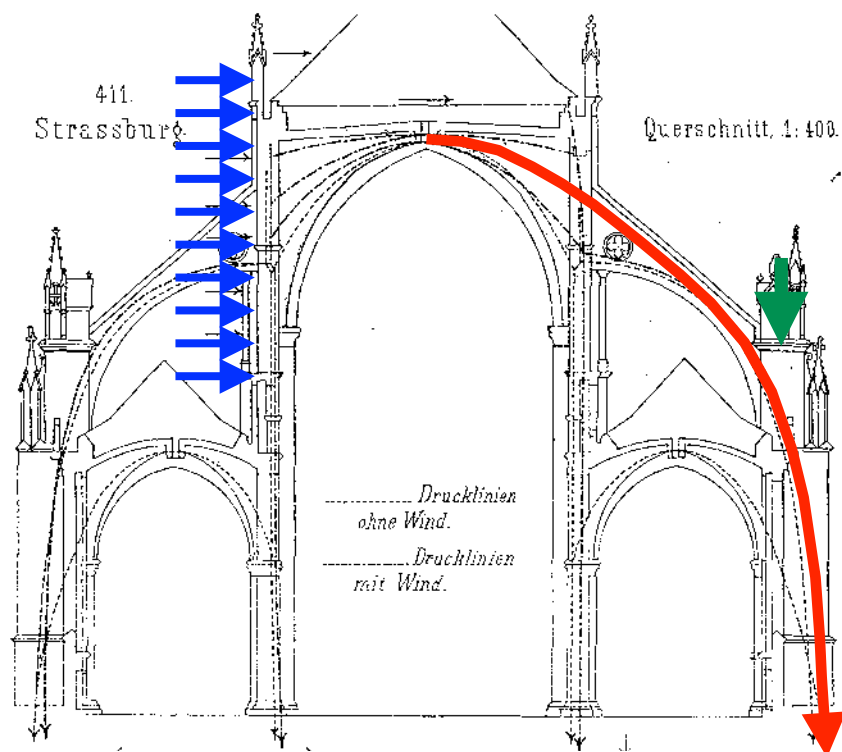
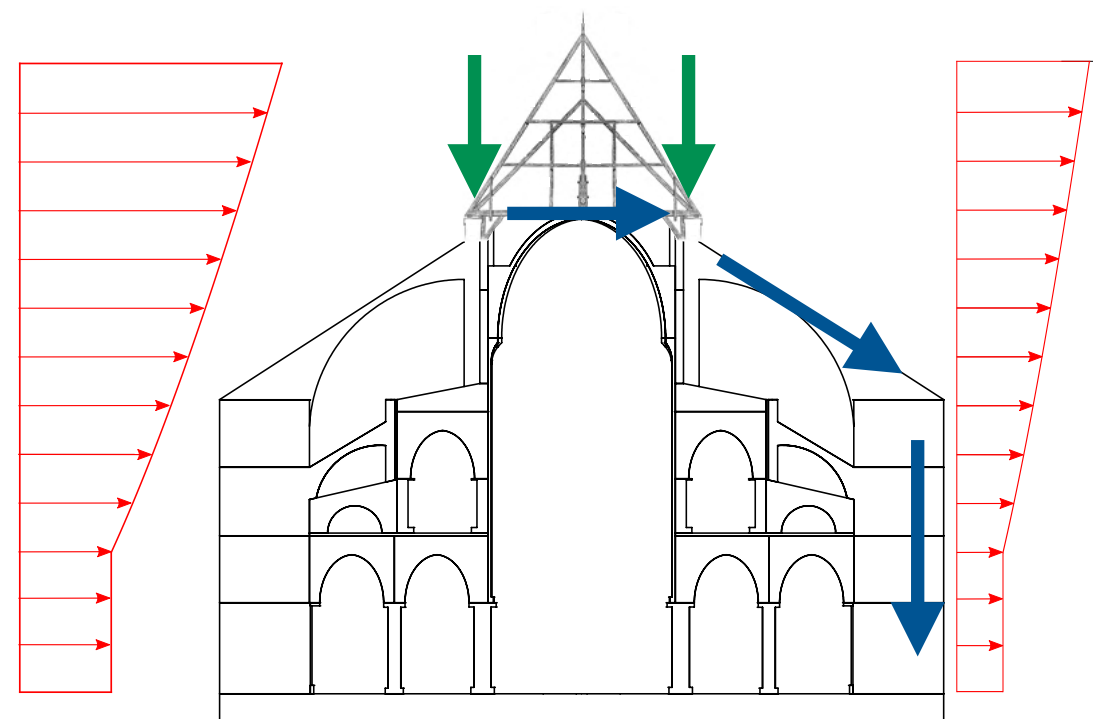
- Une cathédrale gothique est un organisme délicat, dont l'équilibre repose sur une **collaboration des différentes parties structurales**.
- Les éléments caractéristiques sont: **piliers, voûte d'arêtes, charpente, arcs-boutants, pinacles et contreforts**.



- Fonctionnement statique sous l'action du poids propre.
- Le concept fondamental est que l'arc et la voûte sont des structures qui portent les charges verticales grâce à la présence d'une force de contraste, la poussée horizontale.
- Cette poussée doit être ramenée en fondation.
- Ceci est assuré par les arcs-boutants et les contreforts.
- Cette organisation statique est caractéristique de l'art gothique.

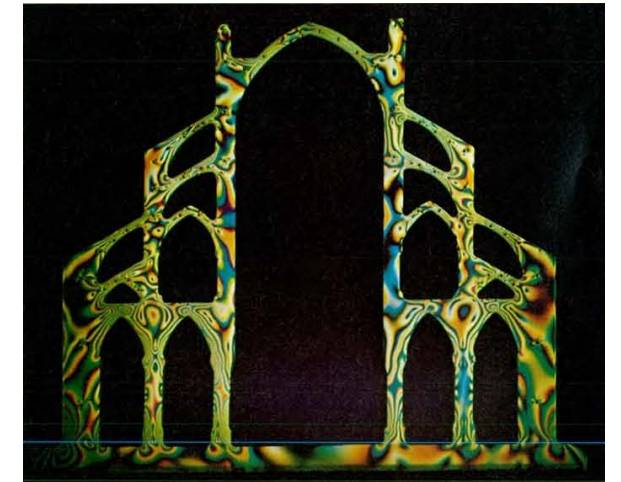
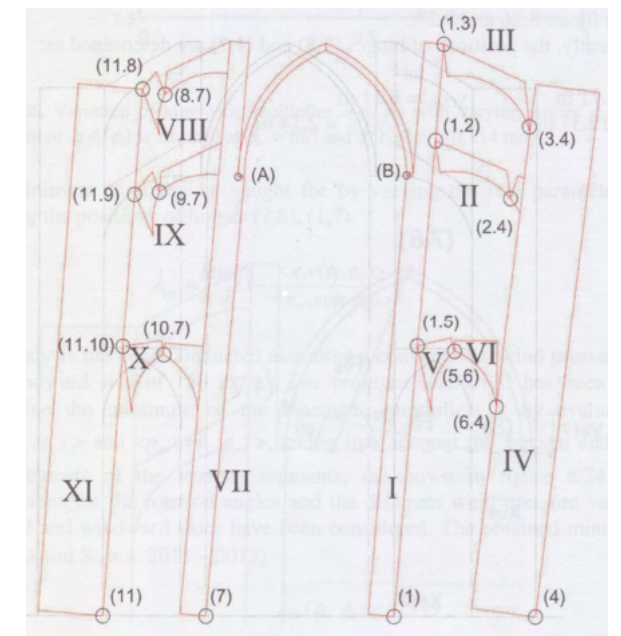
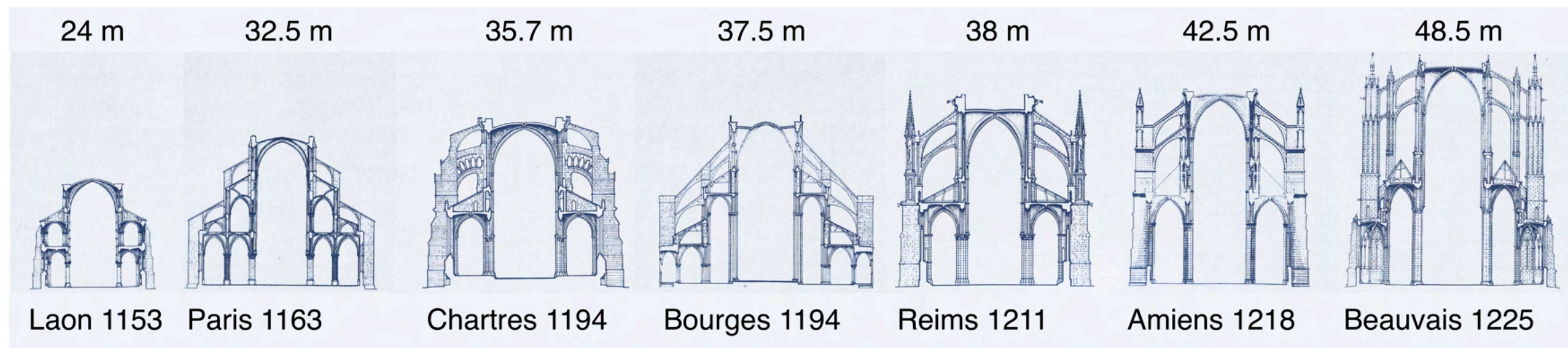


- Fonctionnement sous l'action du vent: le vent produit une **poussée horizontale** sur la partie haute.
- Cette poussée est reportée en fondation par les parties rectilignes des arcs-boutants et par les contreforts, avec l'aide des pinacles.
- La poussée passé du côté au vent à celui sous le vent aussi **à travers la charpente**, notamment avec les entrails.
- Le poids de la charpente, en outre, contribue fortement à l'équilibre du mur gouttereau: **une charpente légère est un contresens structural**.
- La charpente revêt donc un rôle fondamental dans l'équilibre d'une cathédrale, elle n'est pas qu'une structure de couverture.



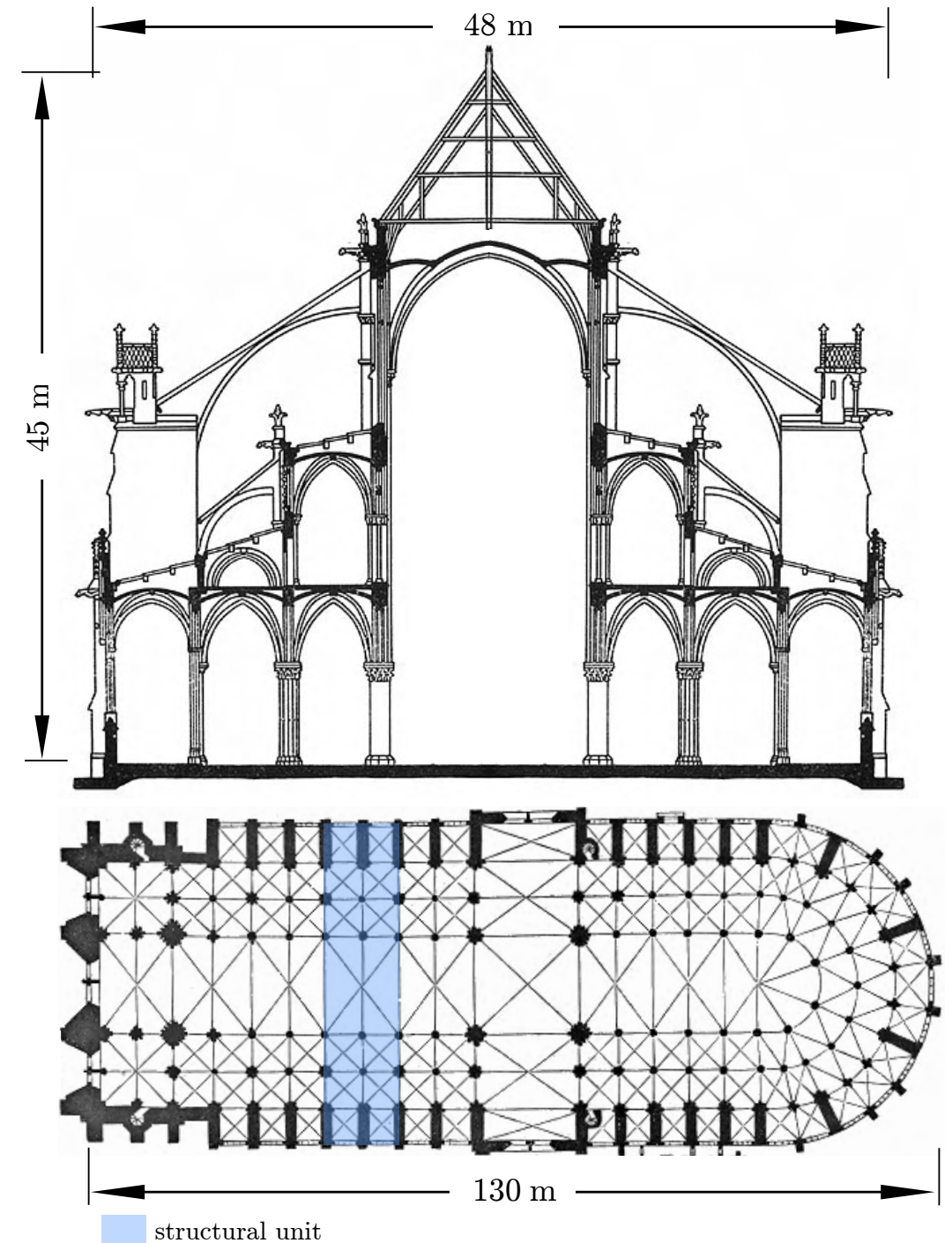
Les raisons d'une recherche: état de l'art

- La question est: quel est le vent capable de causer la ruine structurale d'une cathédrale gothique?
- Très peu d'études concernent ce problème:
 - R. Mark (Univ. Princeton), photo-élasticité 2D, '70-'80
 - M. Como (Univ. Rome 2), analyse limite 2D, 2013, 2015
- Problème: théorie inadéquates, schémas plans
- **Objectif:** simulation numérique sur un modèle 3D



Architecture et dimensions de Notre Dame

- Objet de l'étude: Notre Dame



Une structure élaborée...et fragile



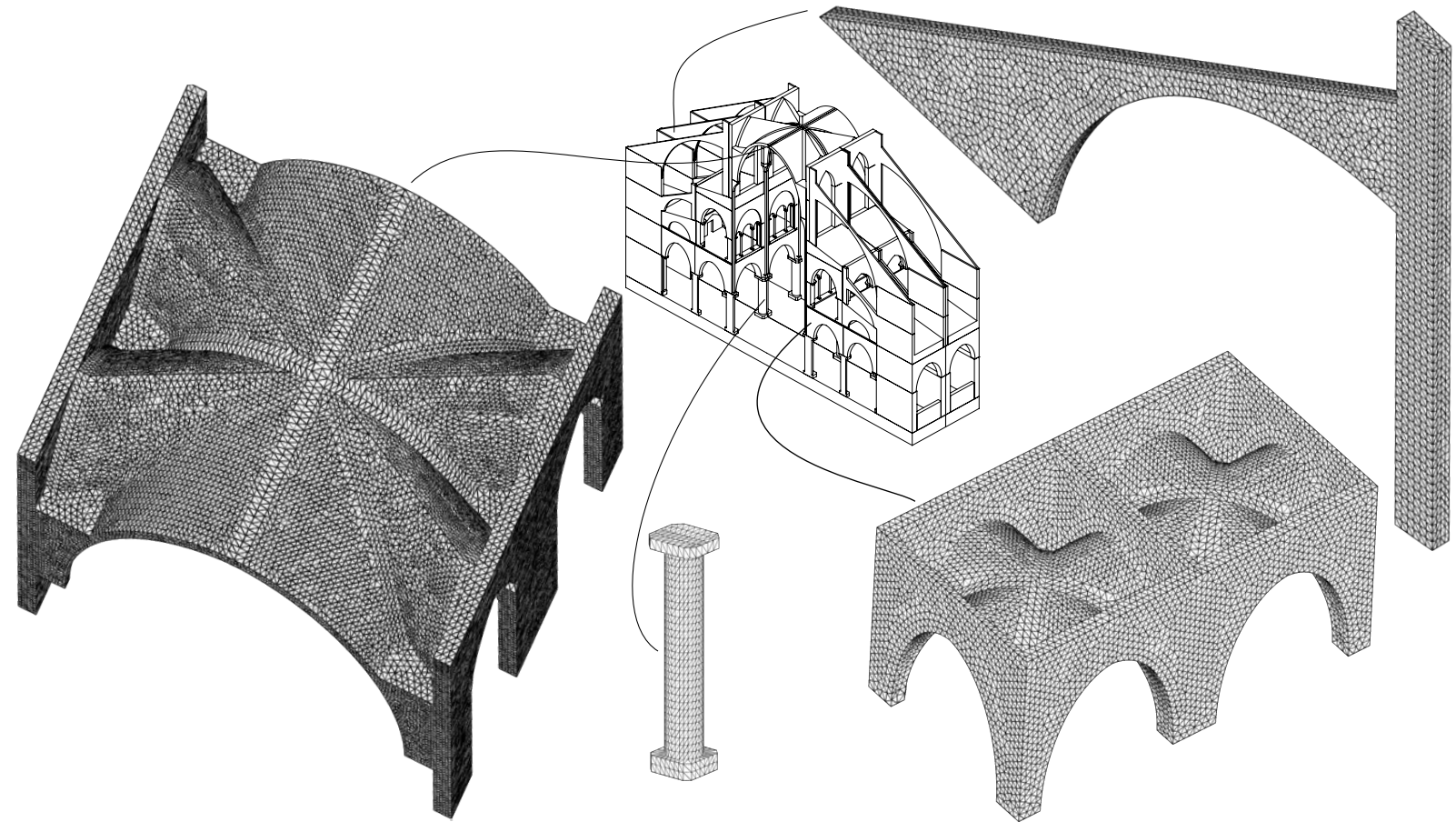
Les arcs boutants

- Parmi les plus grands au monde, ils ont une volée de ~12 m

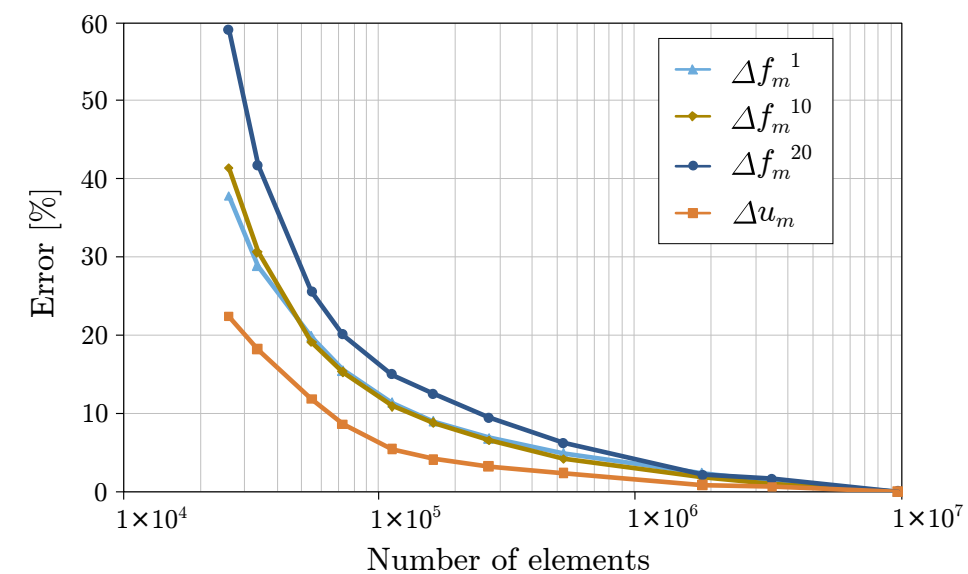


Le modèle numérique

- Modèle réalisé à partir du relevé laser 3D de A. Tallon



- Le modèle FEM
(dimension moyenne éléments
~0.2 m, $\sim 1.83 \times 10^6$ éléments,
 $\sim 1.25 \times 10^6$ dof)



Modélisation du vent et du matériau

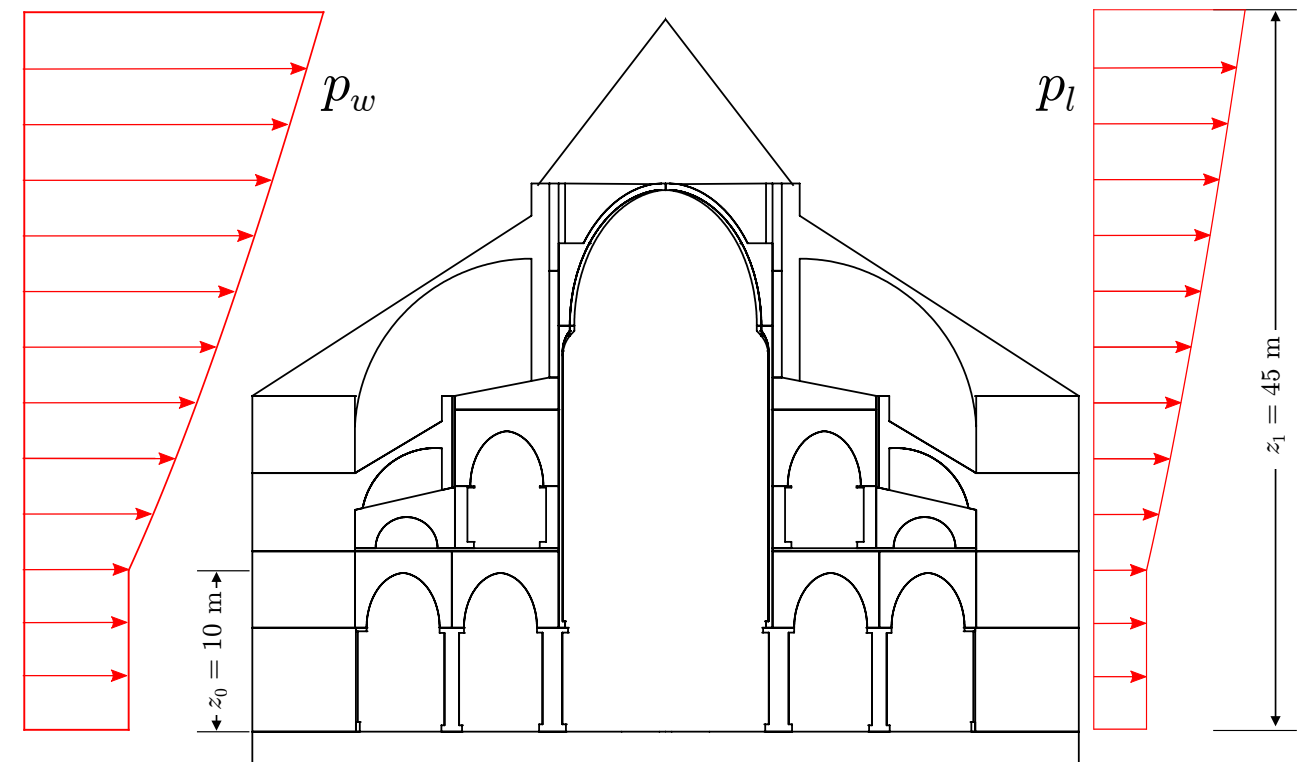
- Modèle de vent: variation avec une loi en puissance

$$v = \begin{cases} v_0 & \text{if } v \leq v_0 \\ v_0 \left(\frac{z}{z_0} \right)^\alpha & \text{if } v > v_0 \end{cases}$$

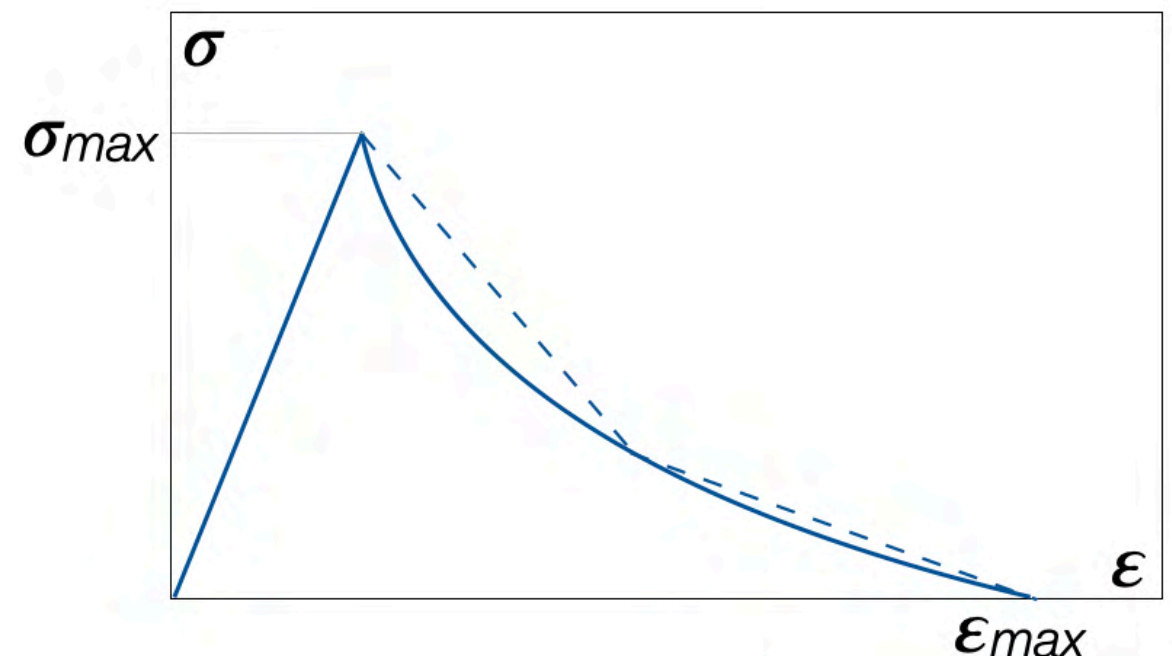
$$z_0 = 10\text{m}, \quad \alpha = 0.35$$

$$p = p_w + p_l = \frac{1}{2} C_D \rho v^2,$$

$$p_w = 2p_l, \quad C_D = 1.5$$

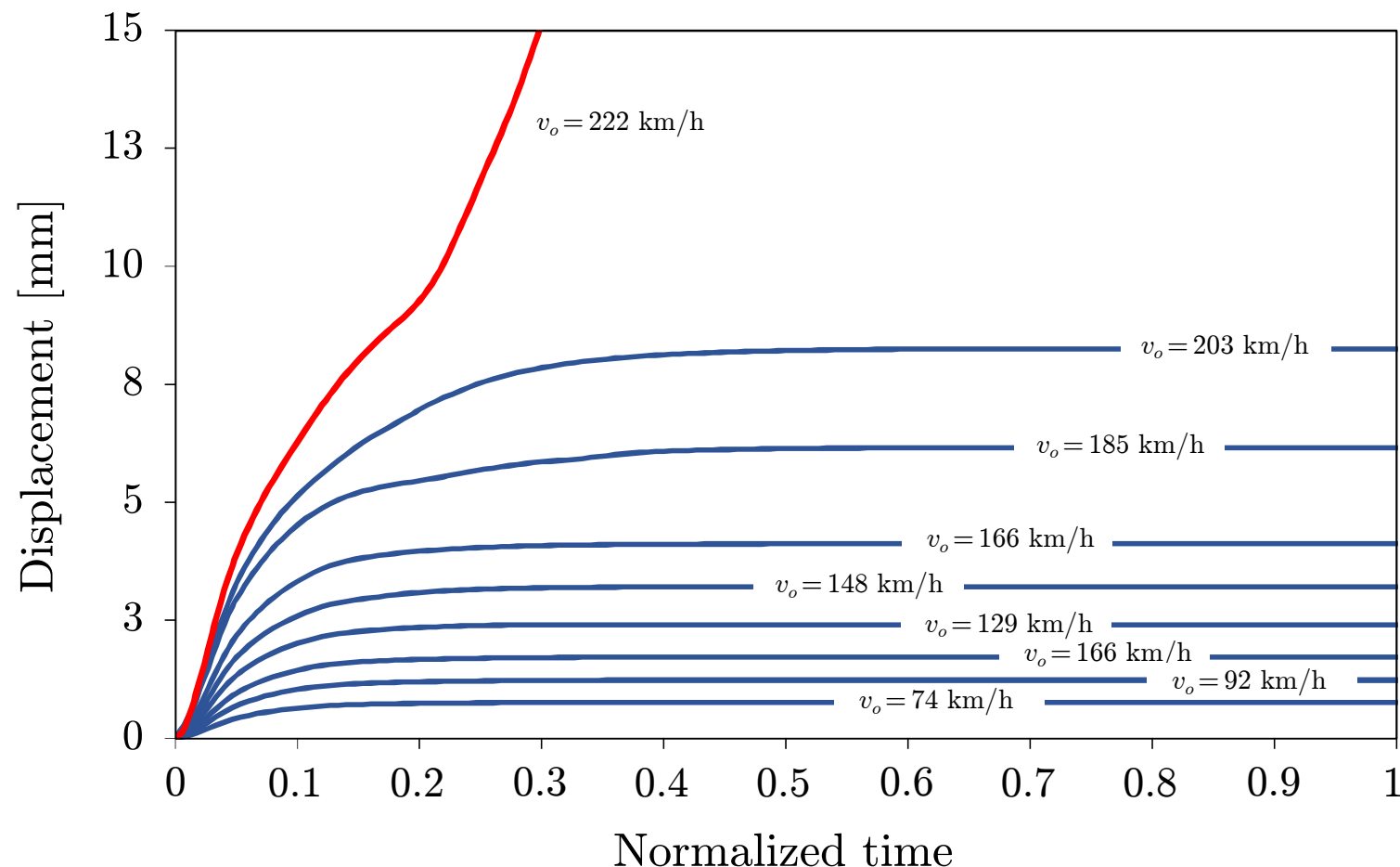
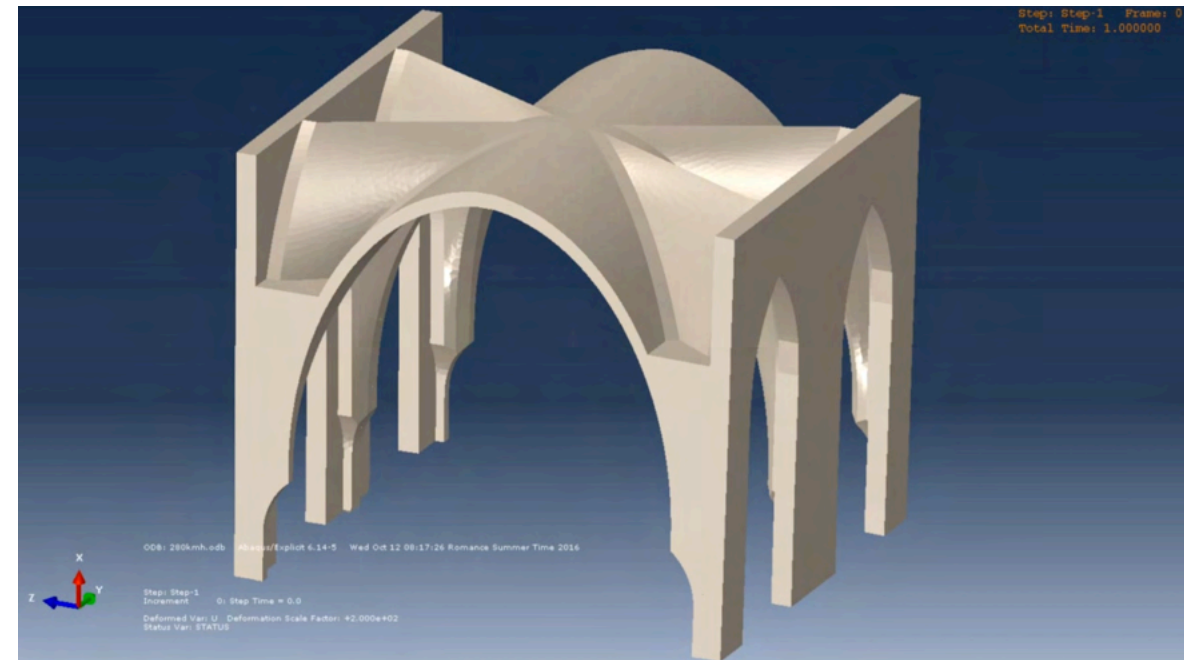


- Matériau non linéaire
endommageable (Hillerborg et al, 1976)

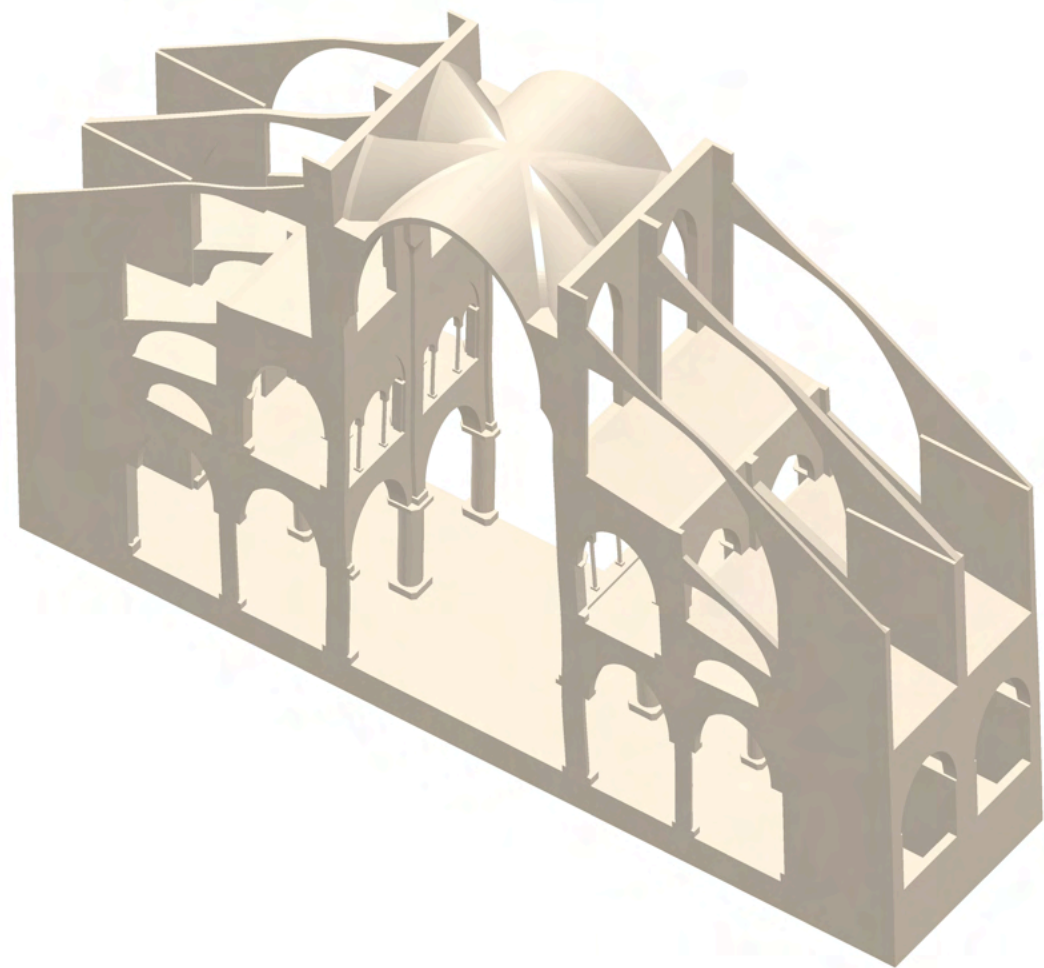


Critère d'évaluation de la vitesse critique de vent

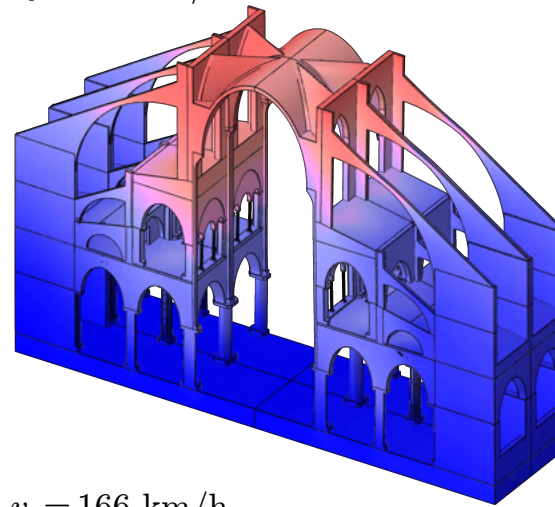
- Contrôle des déplacements: le vent critique produit des déplacements illimités de la clé de voute
- Si le diagramme des déplacements se stabilise, la cathédrale a atteint un état d'équilibre, autrement c'est la ruine structurale



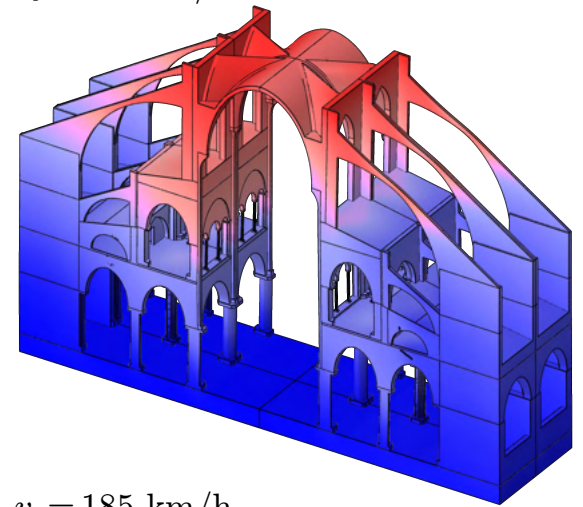
Le mécanisme de ruine



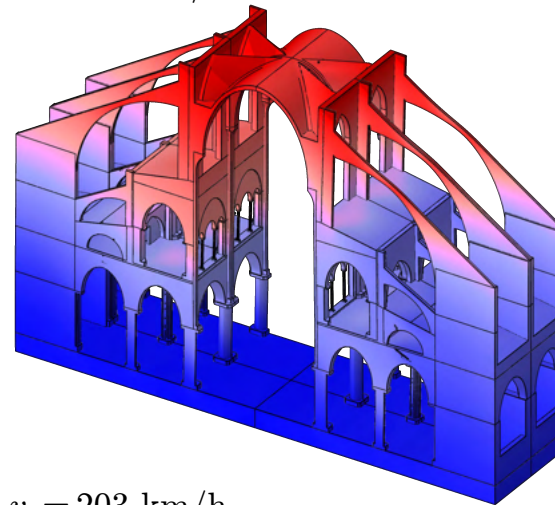
$v_o = 129 \text{ km/h}$



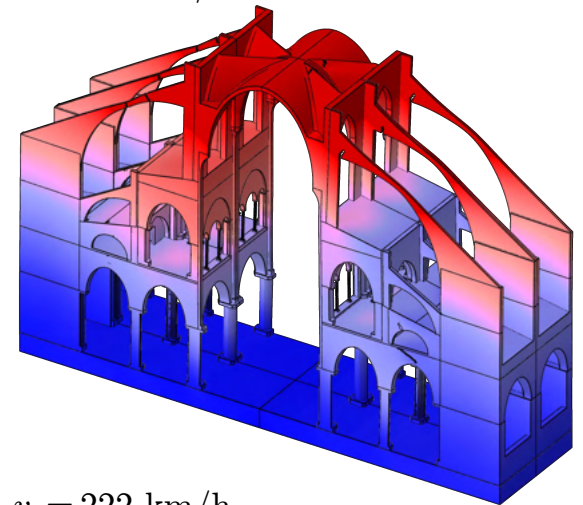
$v_o = 148 \text{ km/h}$



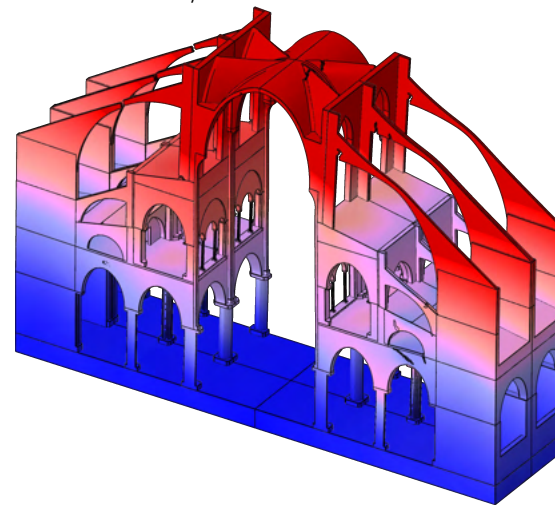
$v_o = 166 \text{ km/h}$



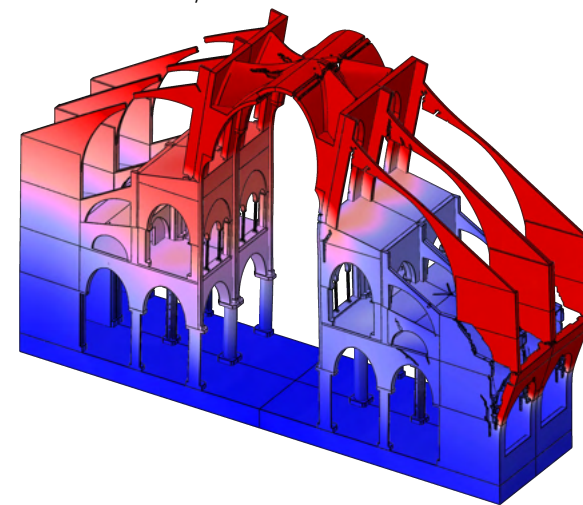
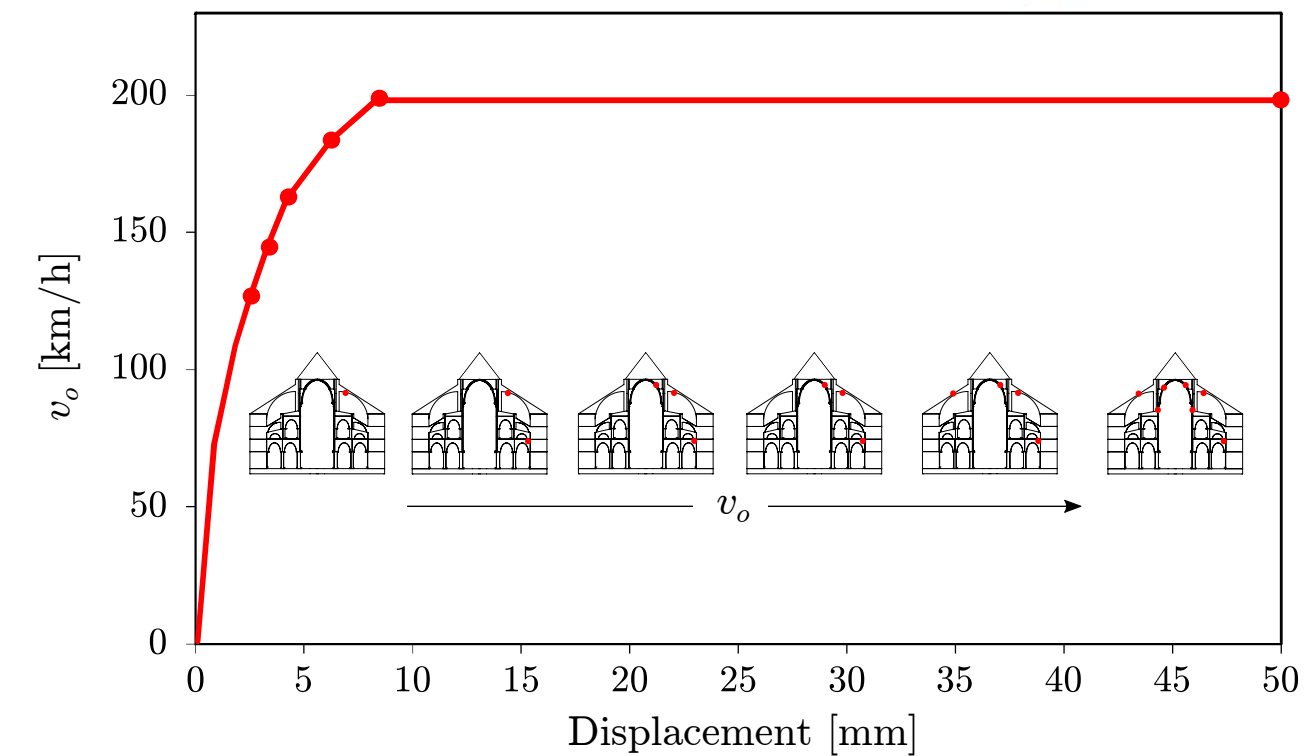
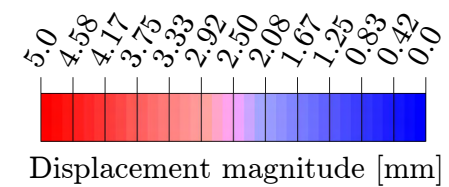
$v_o = 185 \text{ km/h}$



$v_o = 203 \text{ km/h}$



$v_o = 222 \text{ km/h}$

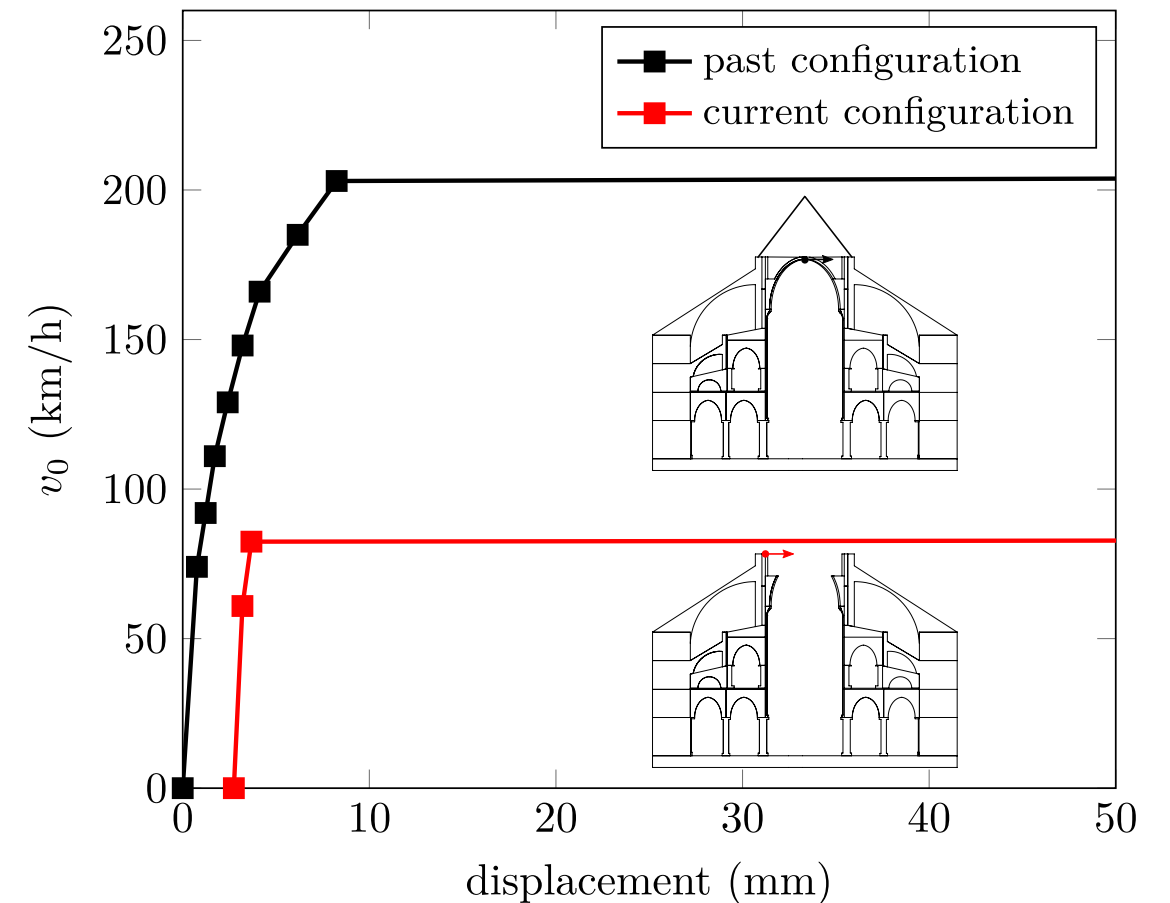
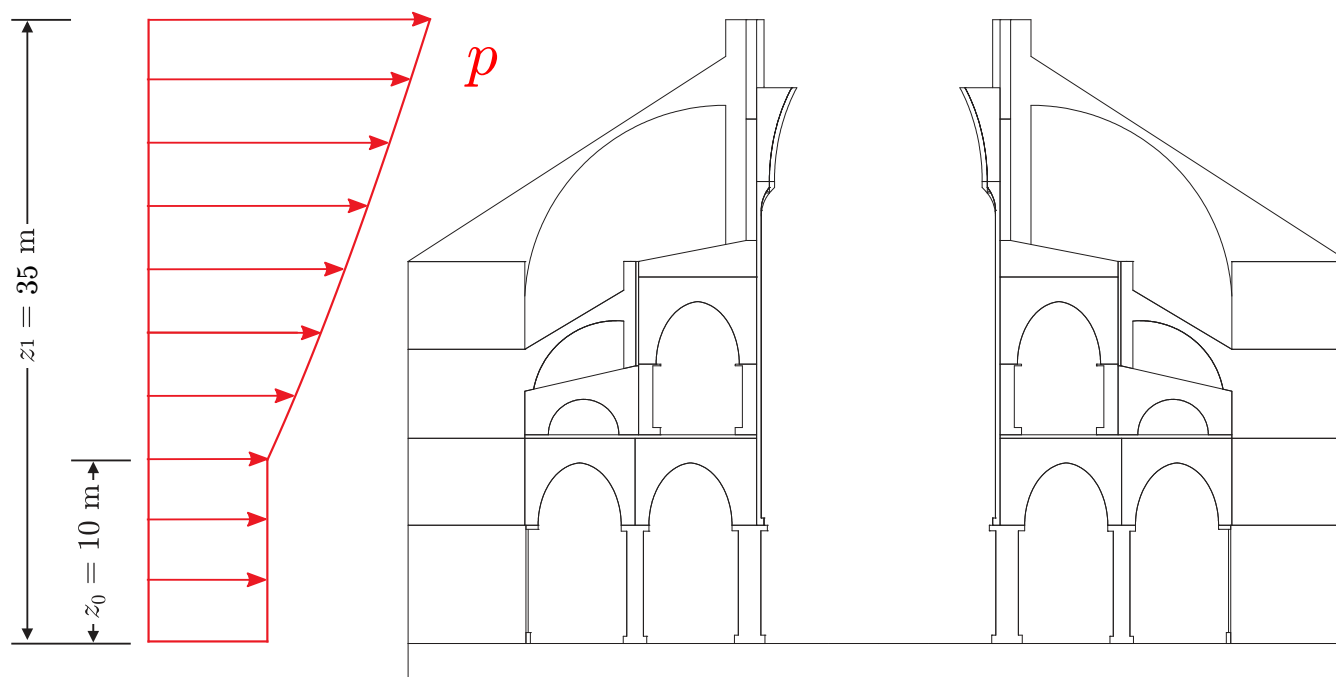
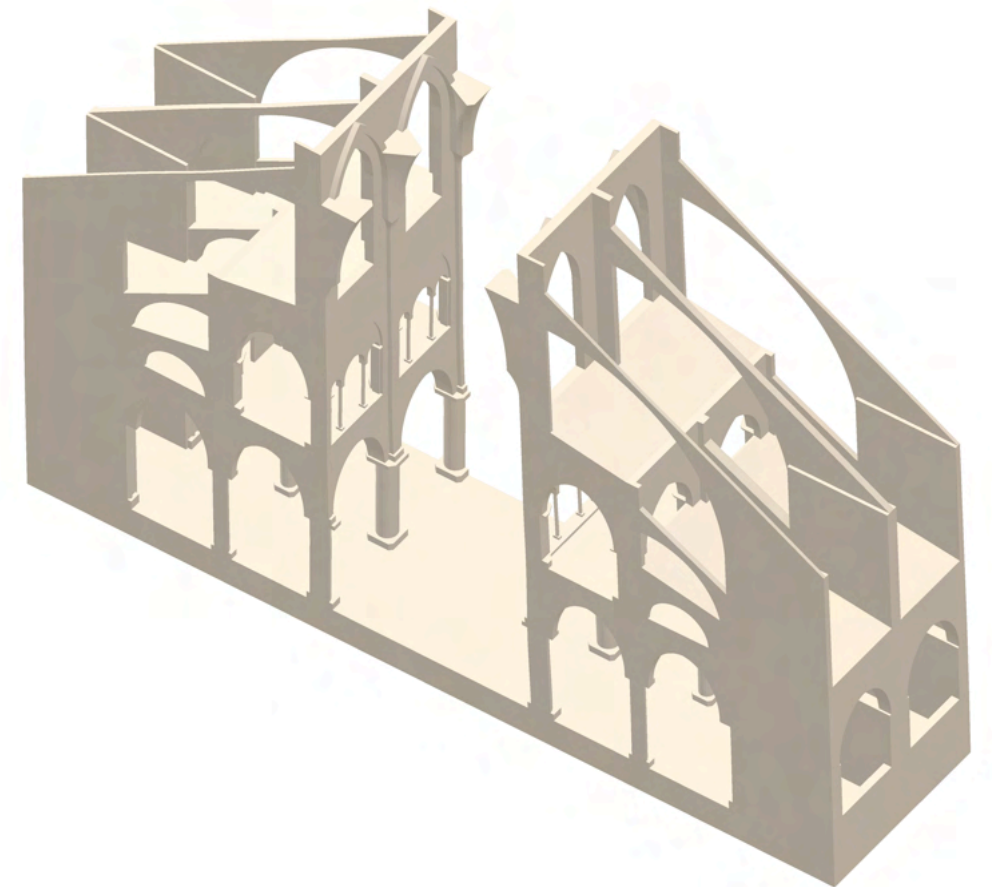


Les effets de l'incendie du 15 Avril 2019

- Ce modèle nous a permis de quantifier les effets des destructions structurales causées par l'incendie

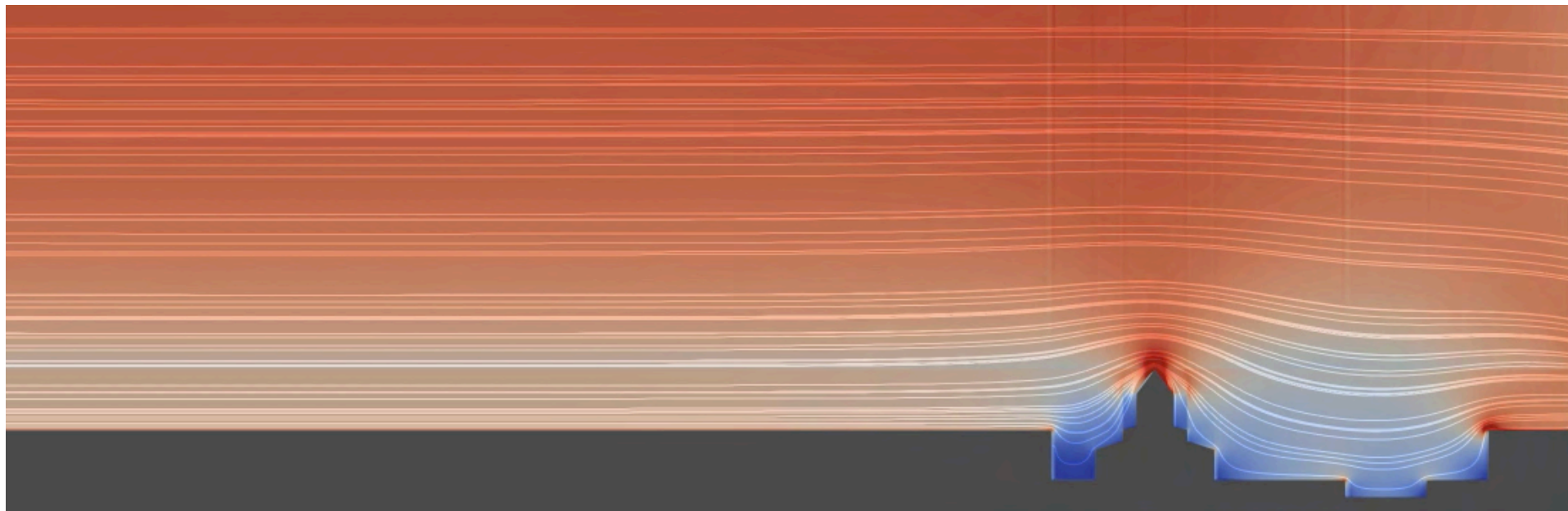


- Le modèle de la structure a été modifié pour prendre en compte les destructions causées par l'incendie
- La vitesse du vent critique passe de ~ 222 km/h à ~ 90 km/h (-60%)



Une recherche expérimentale

- La distribution de la pression du vent sur une cathédrale gothique reste un **problème ouvert**
- C'est un cas où la simulation numérique ne peut toujours pas résoudre le problème de manière efficace

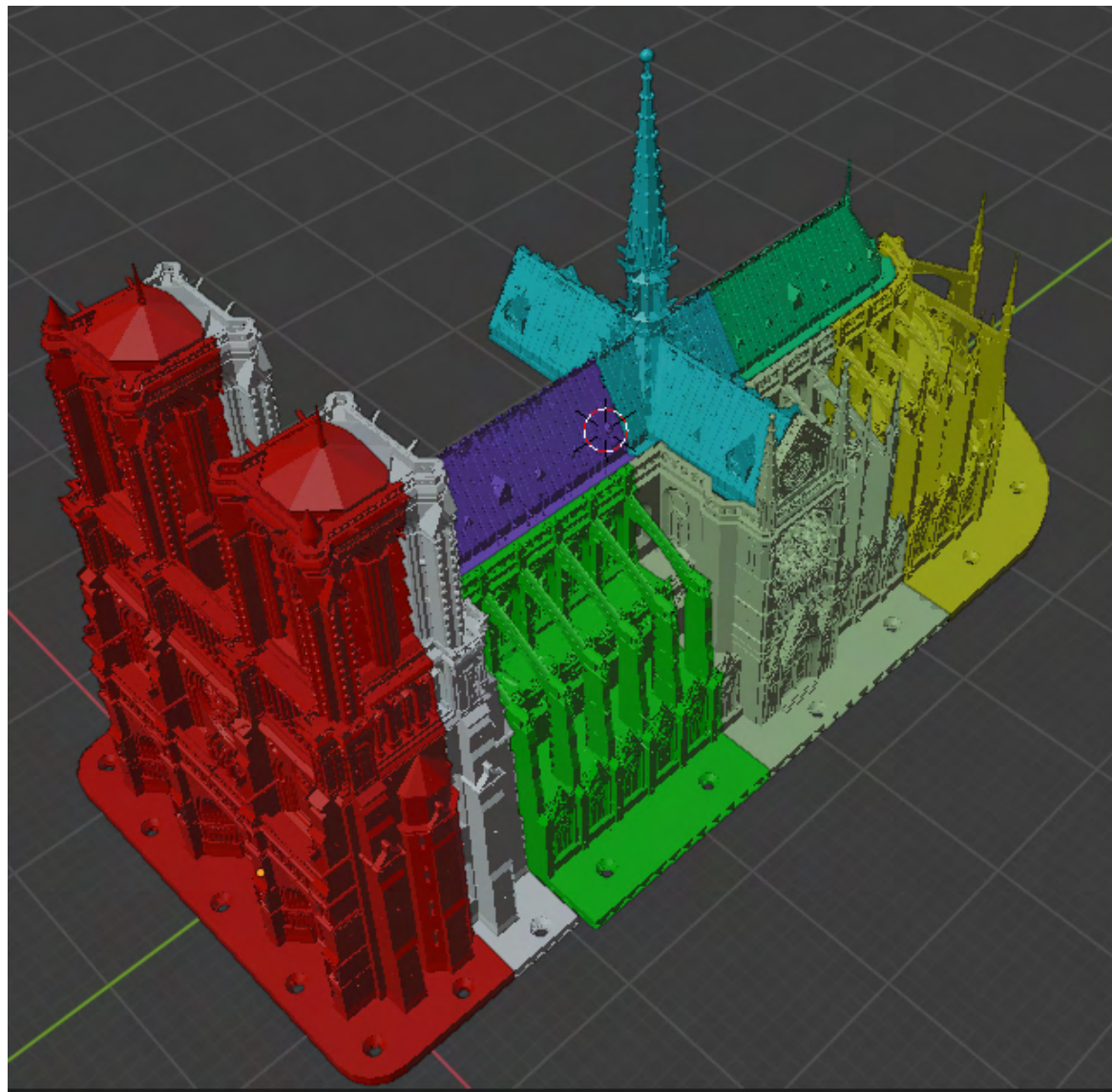
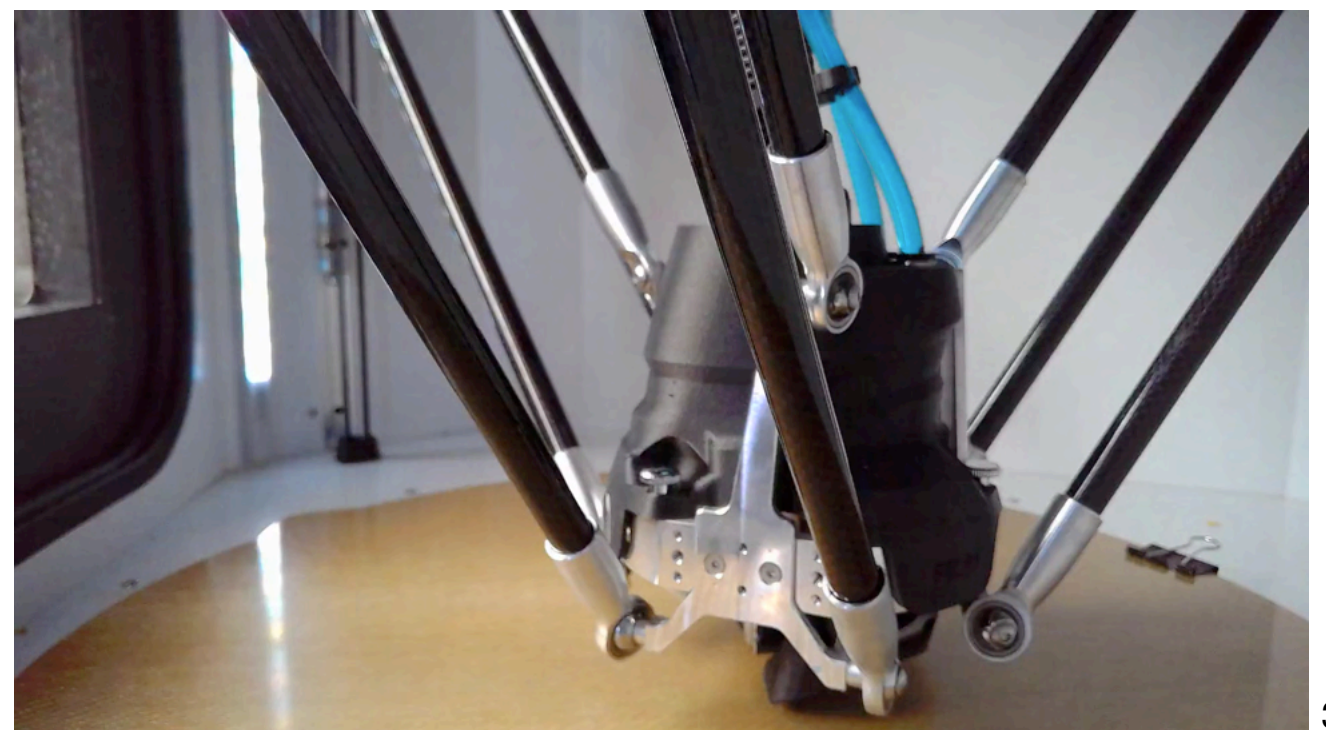


- Expérimentation dans la soufflerie avec couche limite atmosphérique de l'Université de Florence



Le modèle physique

- Modèle 1/200 réalisé à l'I2M par impression 3D

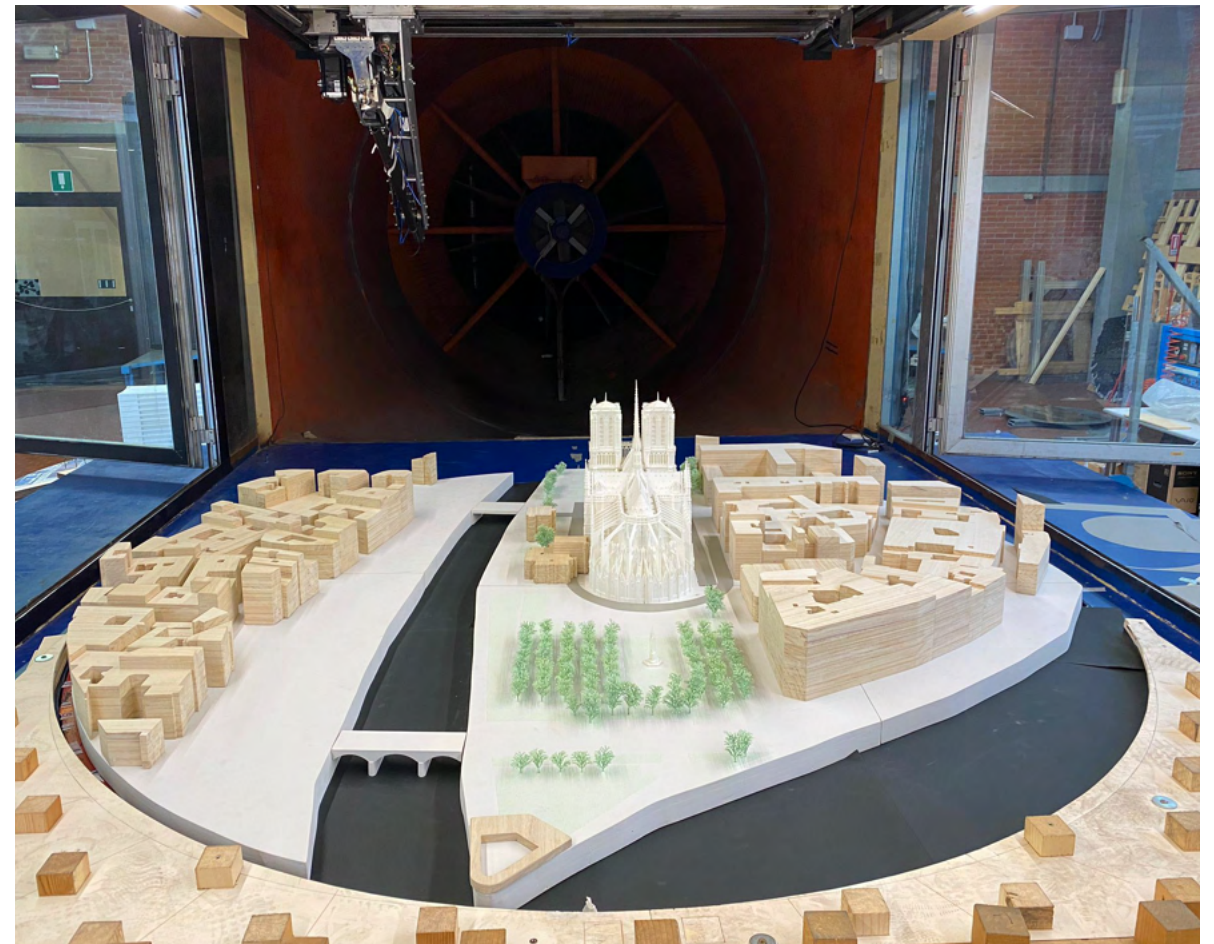


- Le modèle ainsi réalisé a été fortement instrumenté (~1200 capteurs de pression)



Tests en soufflerie

- Tests avec ou sans environnement
- Evaluation de l'influence de l'environnement

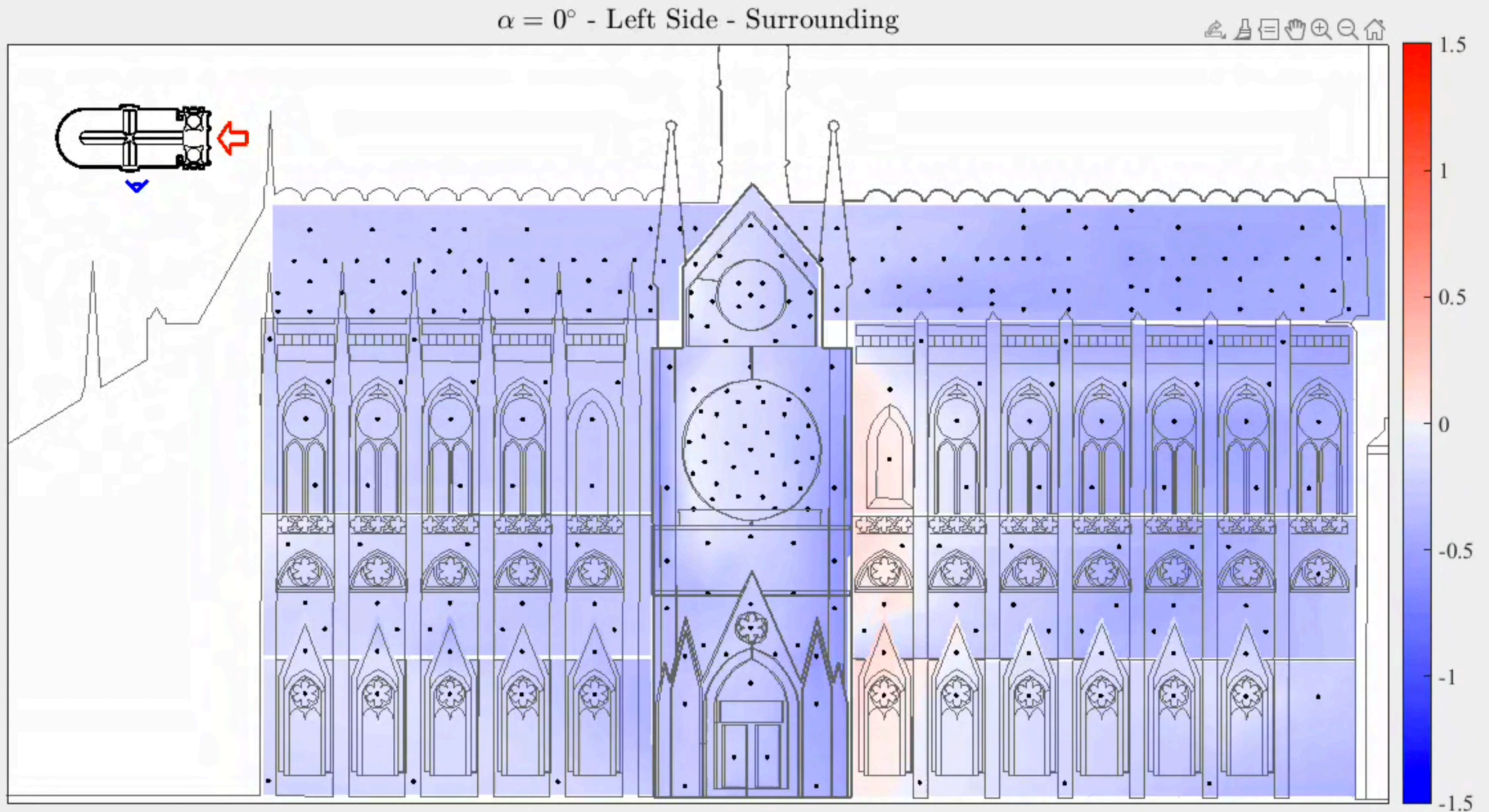


- Visualisations du flux

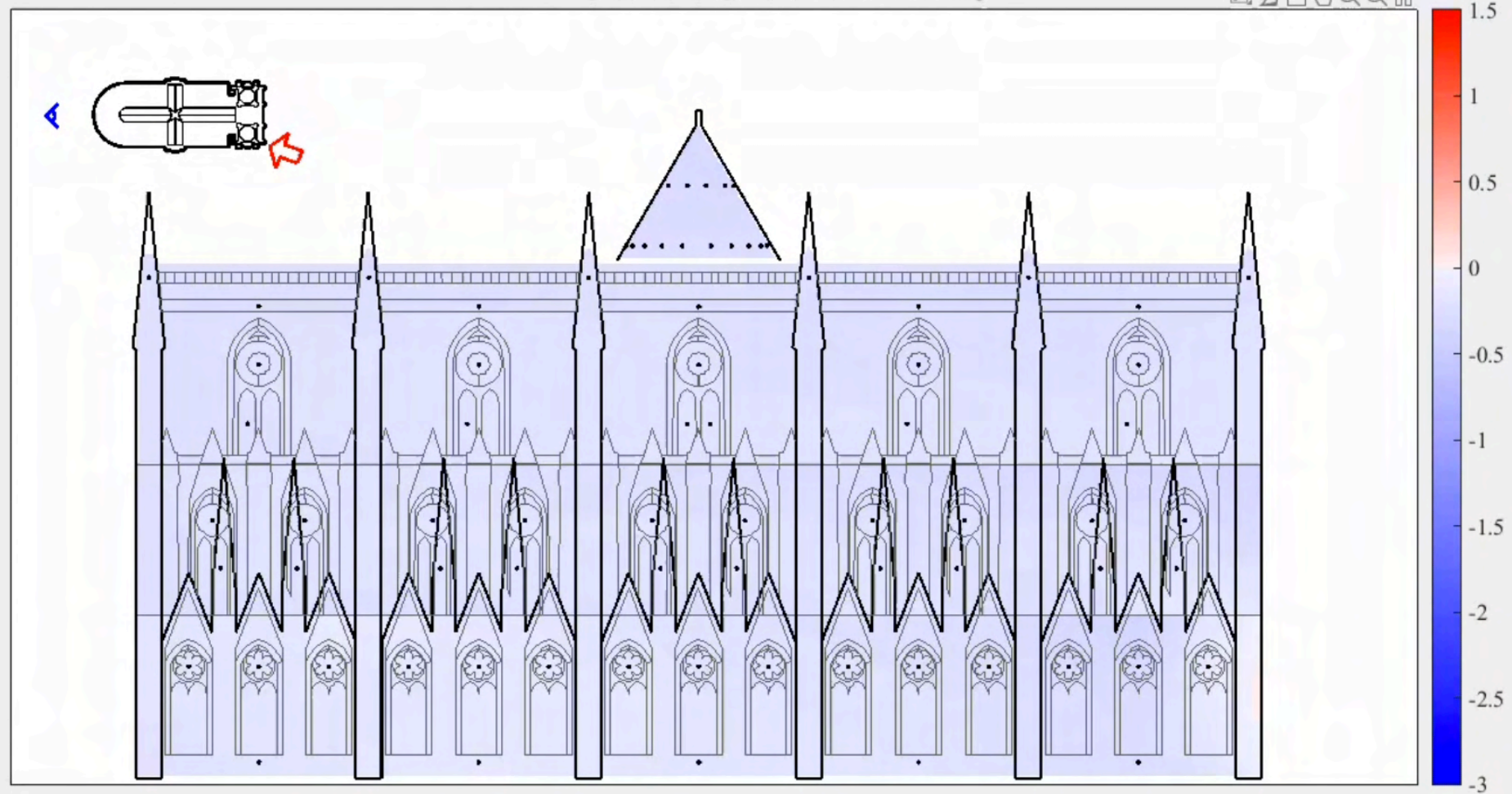


Cartographie des pressions du vent sur la cathédrale

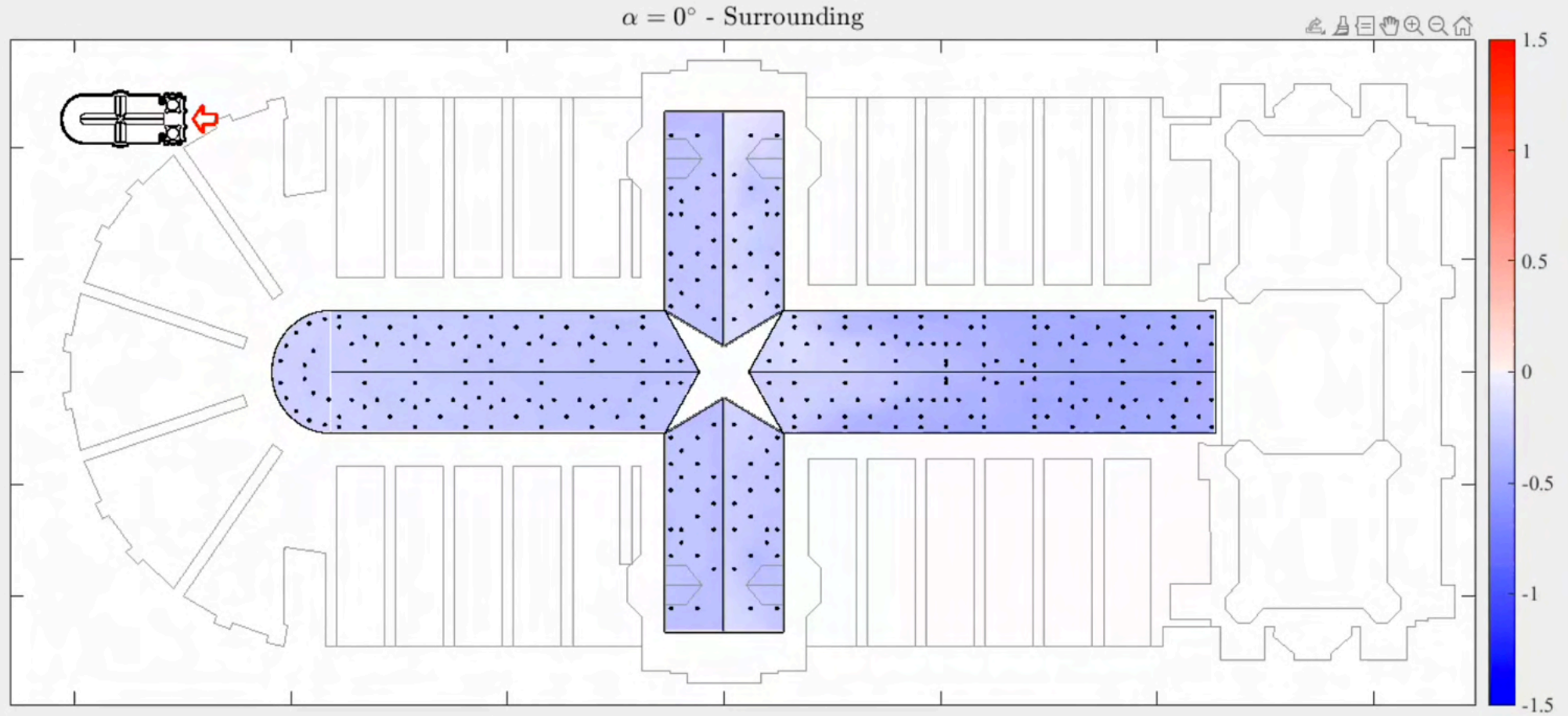
- Variation de la pression du vent avec la direction



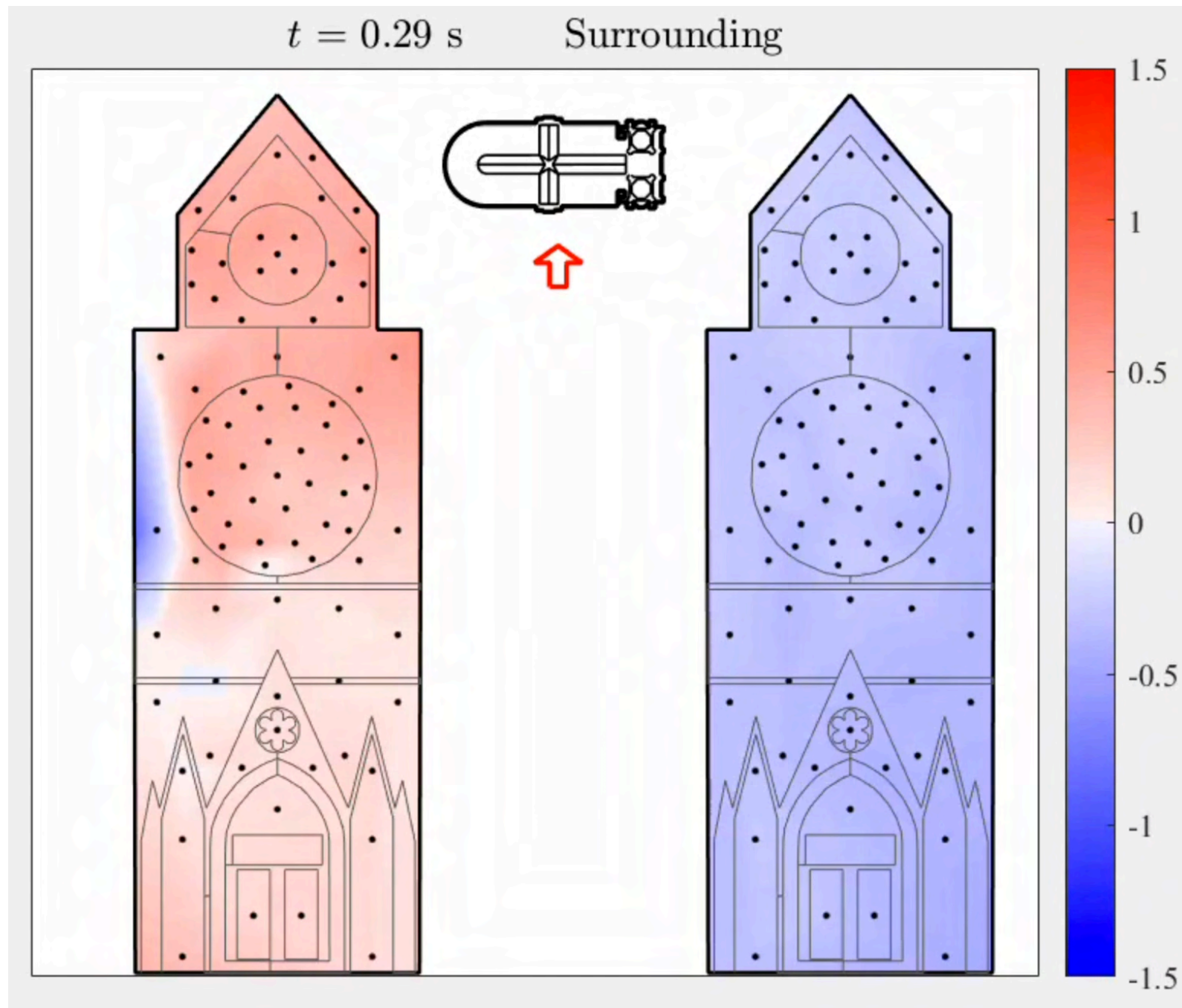
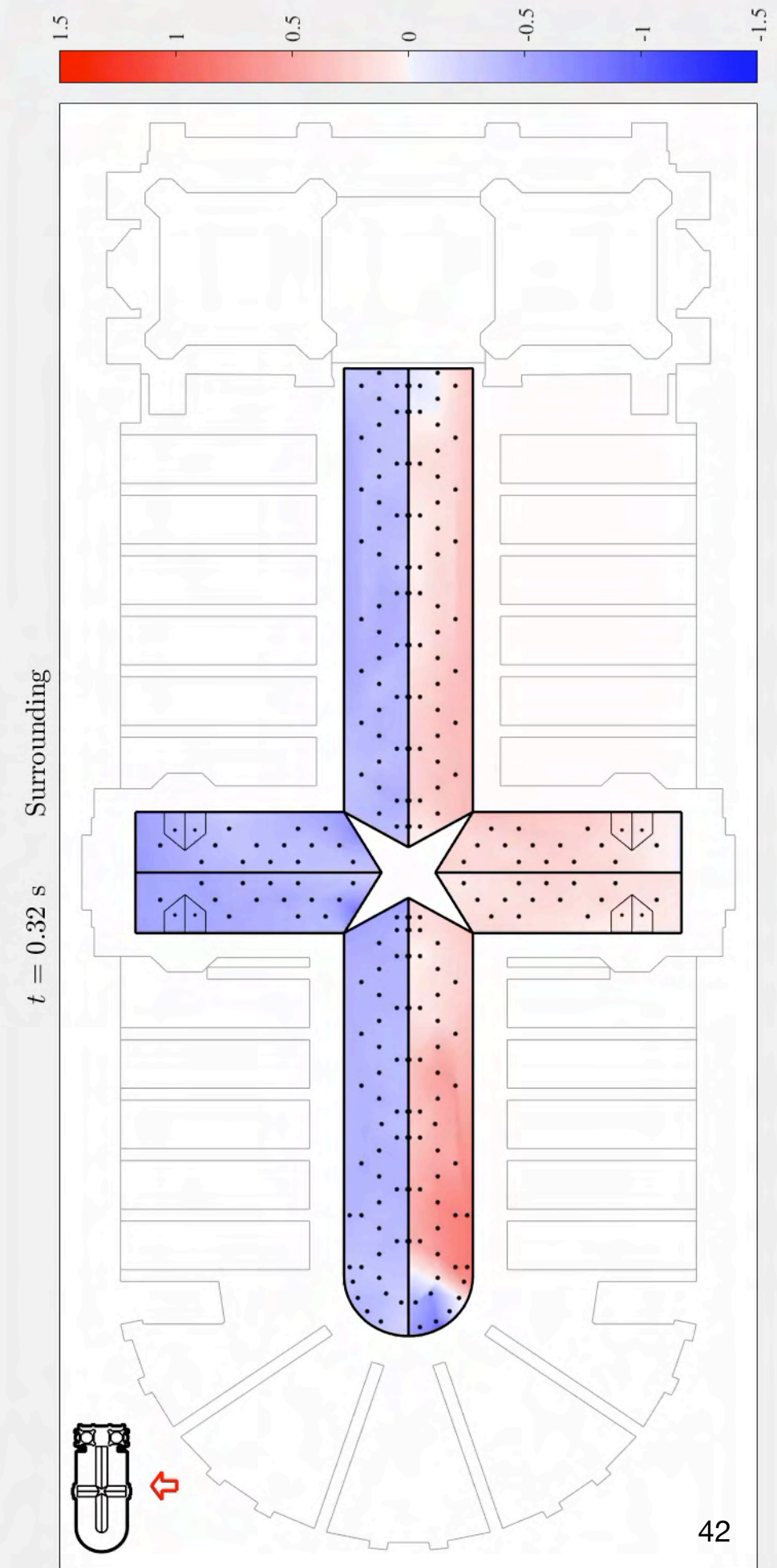
$\alpha = 20^\circ$ - Apsis development - Surrounding



$\alpha = 0^\circ$ - Surrounding



- Effet de la turbulence



4

La mécanique
comme
instrument
d'archéologie
synthétique

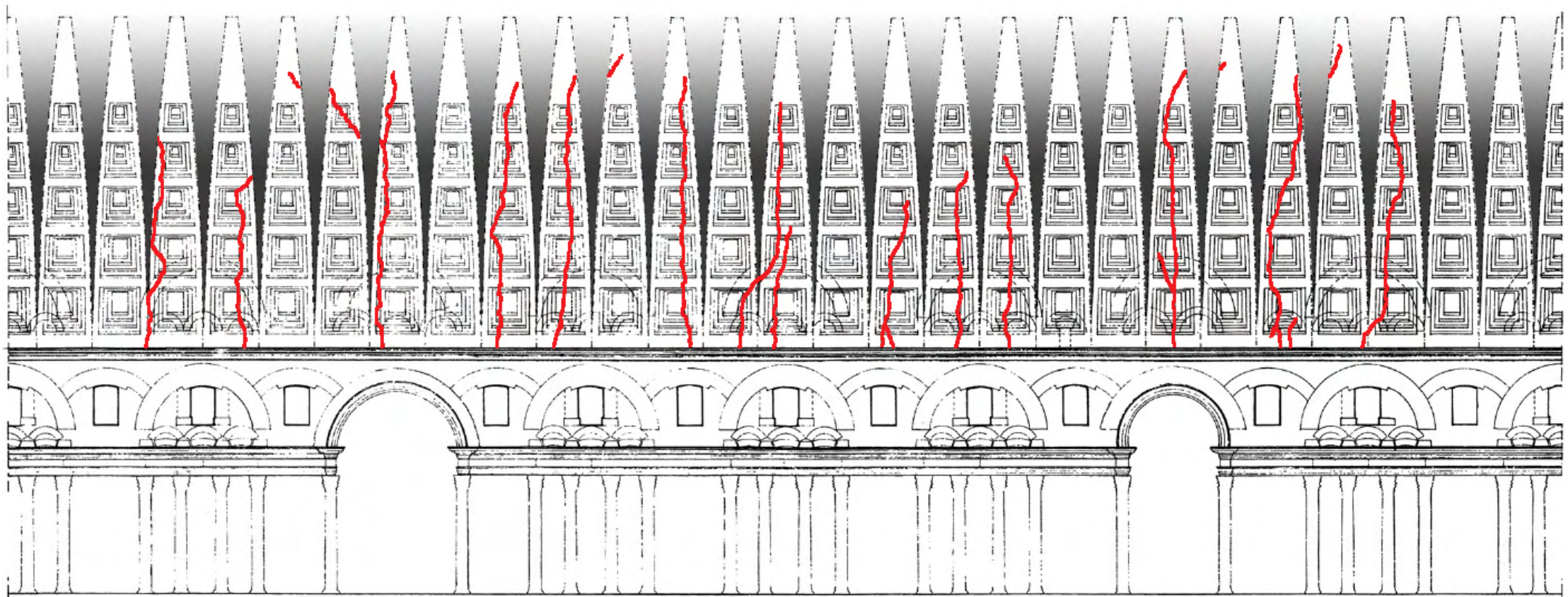


Mécanique des structures et archéologie

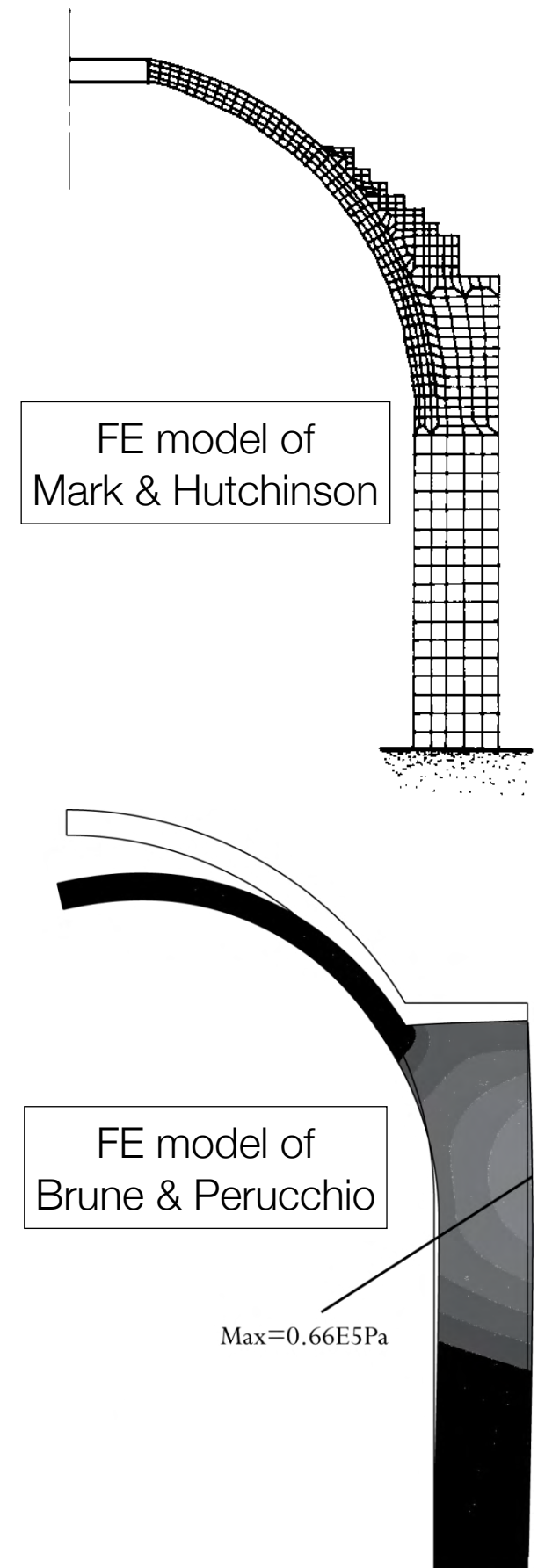
- Dans différentes études on a rencontré des questions d'ordre historique qui attendent encore une réponse
- En particulier: quelle était la **pensée constructive** des anciens bâtisseurs (peu importe si correcte ou pas) ?
- Dans certains cas la mécanique des structures et la simulation numérique peuvent aider
- Le **Panthéon** et **Notre Dame** sont encore deux exemples typiques de ça

Une étude sur les fissures du dome du Panthéon

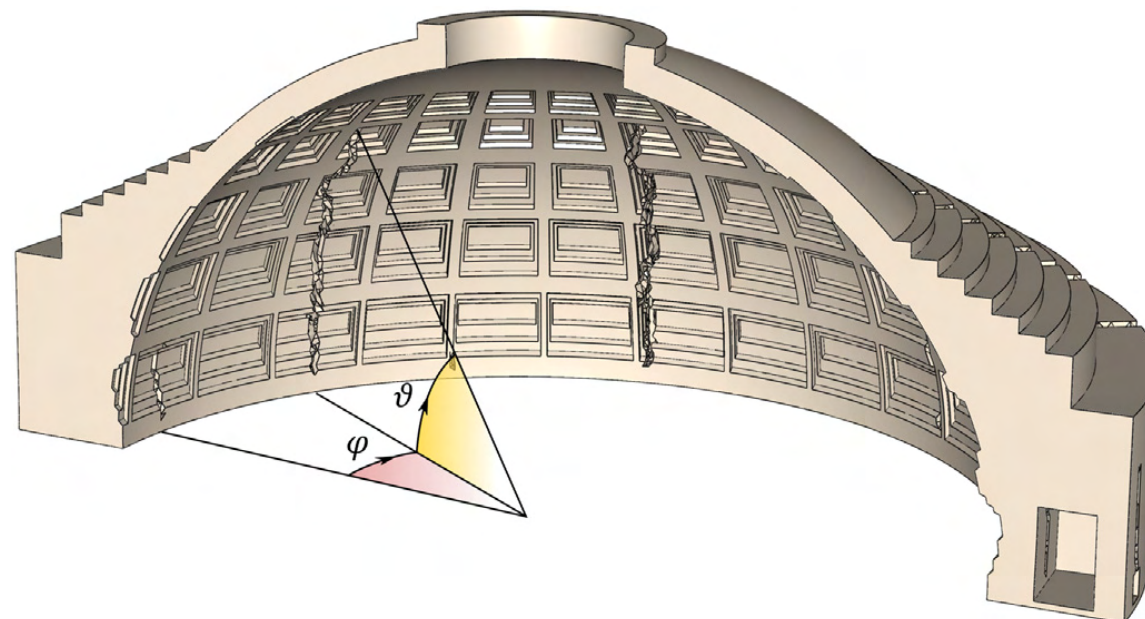
- 1934: Terenzio découvre les 14 grandes fissures du dome
- Ces fissures ont une direction méridienne et s'arrêtent à $\sim 57^\circ$, où les contraintes selon les parallèles deviennent de compression
- Selon Terenzio, les fissures se sont produites immédiatement après la construction, car les briques utilisées pour les réparer portent les mêmes marques que celles du Panthéon



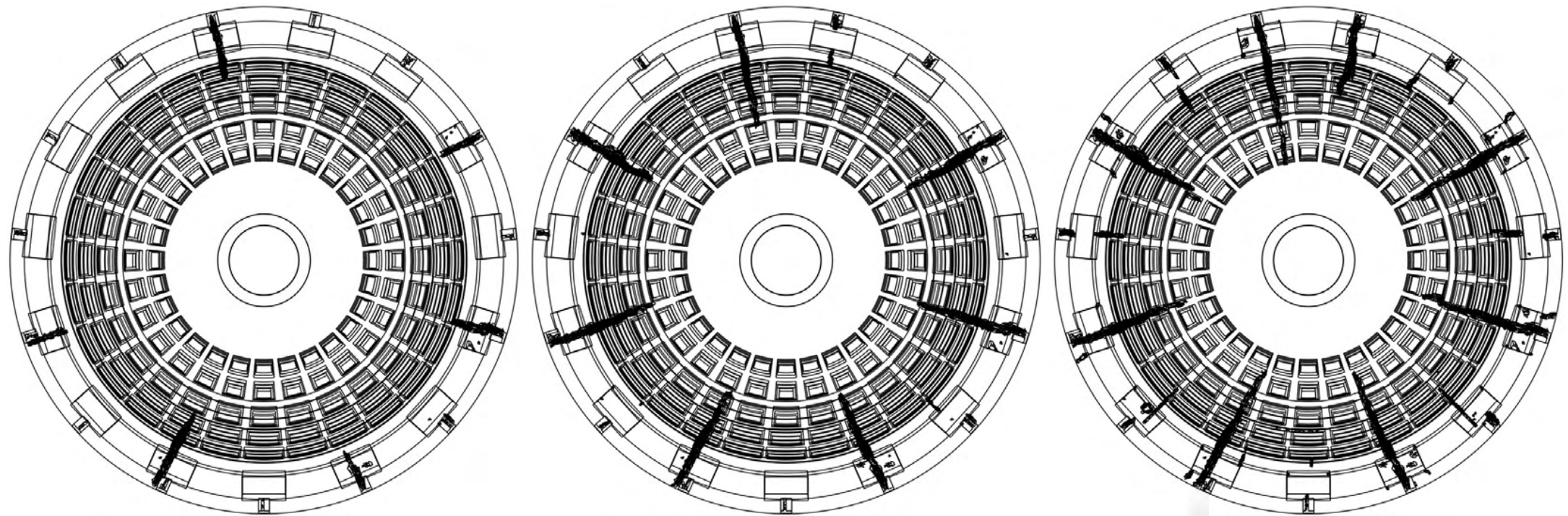
- La question est : les fissures sont liées aux processus de conception du dome et en particulier à la présence des anneaux sur le bas du dome?
- Deux études tirent des conclusions opposées:
 - **Mark & Hutchinson (1986)**: les Romains savaient que les fissures étaient inévitables et qui se formaient très rapidement et pour garantir l'équilibre, dans un mécanisme de contre-balancier, avaient placé les anneaux sur le dome
 - **Brune and Perucchio (2010)**: les anneaux servaient seulement à réduire la contrainte de traction dans le bas du dome
- Les deux études s'appuyaient sur deux modèles FEM très (trop) réduits



- Pour établir si Mark & Hutchinson ont raison, il fallait montrer que les fissures pouvaient effectivement apparaître tôt après la construction du dome
- Nous avons cherché un mécanisme physique susceptible de produire de telles fissures: c'est le retrait du béton
- Nous avons simulé le retrait par une variation de température et on a fait un calcul en trois étapes: on applique la gravité sur le dome encore supporté par les échafaudages, on fait varier la température et finalement on simule la dépose de l'échafaudage
- La simulation numérique est faite sur le modèle 3D



- Résultat: on retrouve des fissures méridiennes très semblables à celles qui existent

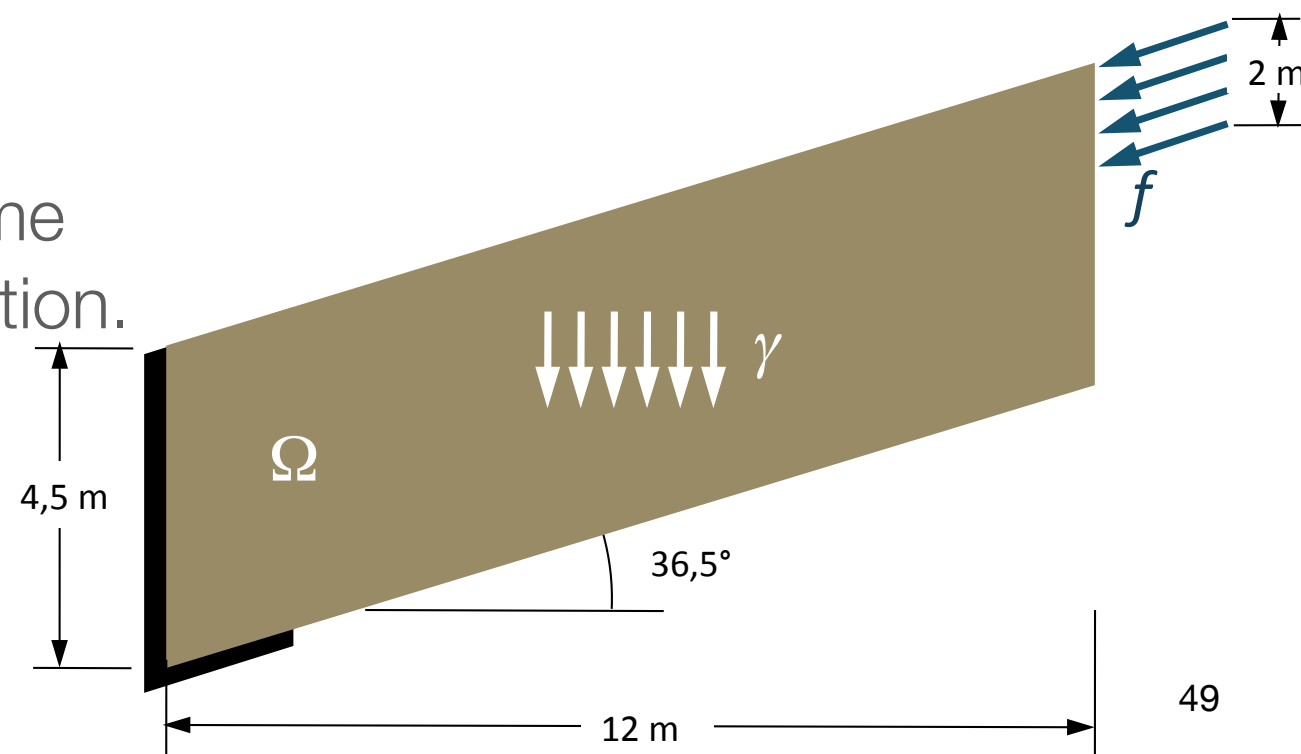


- Mark & Hutchinson avaient peut être raison:
 - probablement les Romains avaient déjà observé ce phénomène de fissuration précoce dans d'autres structures similaires
 - pour garantir l'équilibre avaient alors utilisé les anneaux comme contrepoids

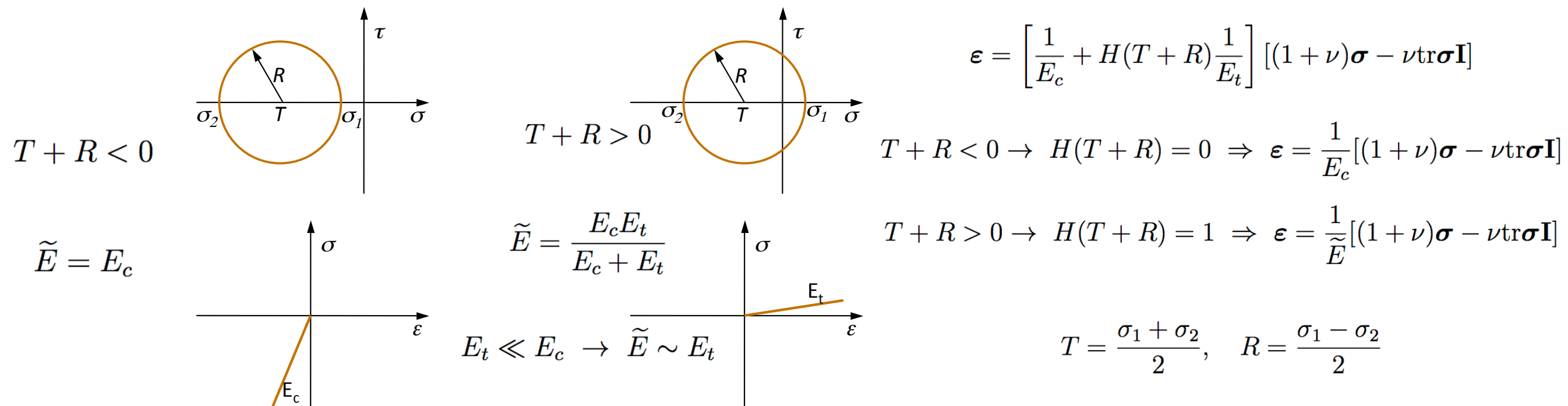


Les arcs-boutants de Notre Dame

- Un vieux débat concerne le fonctionnement des arcs boutants et notamment la conception faite de ces structures de la part des constructeurs.
- La question est: le fait que les structures en pierre ont une **faible résistance à la traction** a pu inspirer les constructeurs dans leur conception des arcs boutants?
- On a essayé de donner une réponse par l'**optimisation topologique appliquée aux matériaux non-résistants à la traction** (JNM 2016)
- Actions: gravité et poussée inclinée (pour simuler l'action du vent et la poussée de la voute).
- Contrainte: conserver le 48% du volume d'origine et aucune résistance à la traction.
- Problème plan



- Loi de comportement: 2D isotrope non-symétrique.



- Formulation du problème d'optimisation topologique: problème de minimum avec contrainte: double minimisation de l'énergie complémentaire avec contrainte sur le volume (Allaire & Kohn, 1993)

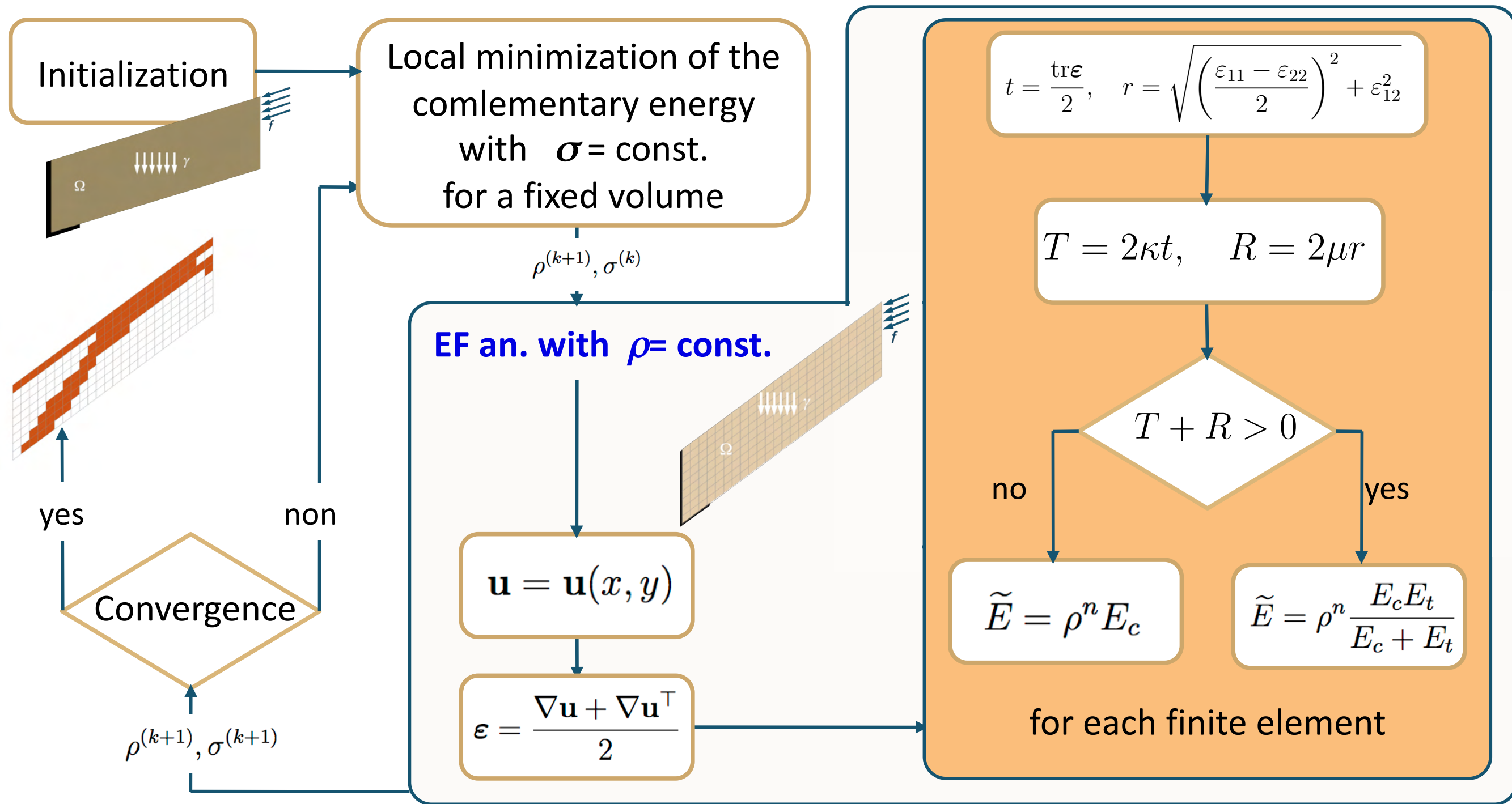
$\min_{\rho \in [0,1]} \min_{\sigma \text{ S.A.}} \int_{\Omega} \frac{1}{2} \sigma \cdot \mathbb{S} \sigma \, d\omega$ • Méthode **SIMP** (Solid Isotropic Material with Penalization):

avec

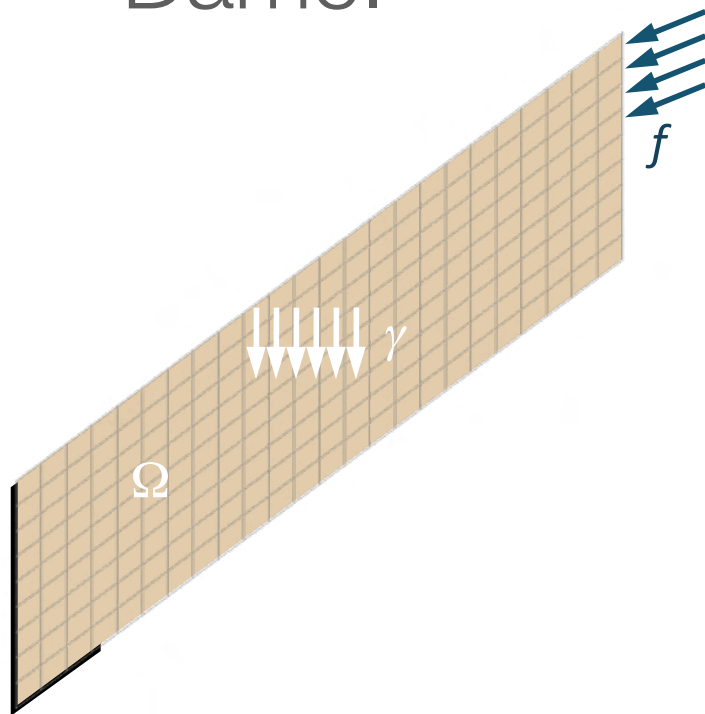
$\frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \rho \, d\omega = \alpha, \quad \alpha \in [0, 1]$

$\mathbb{S} = \frac{1}{\rho^n} \tilde{\mathbb{S}} \quad n \geq 1, \quad \tilde{\mathbb{S}} = \tilde{\mathbb{S}}(\tilde{E}, \nu)$

- Procédure numérique:

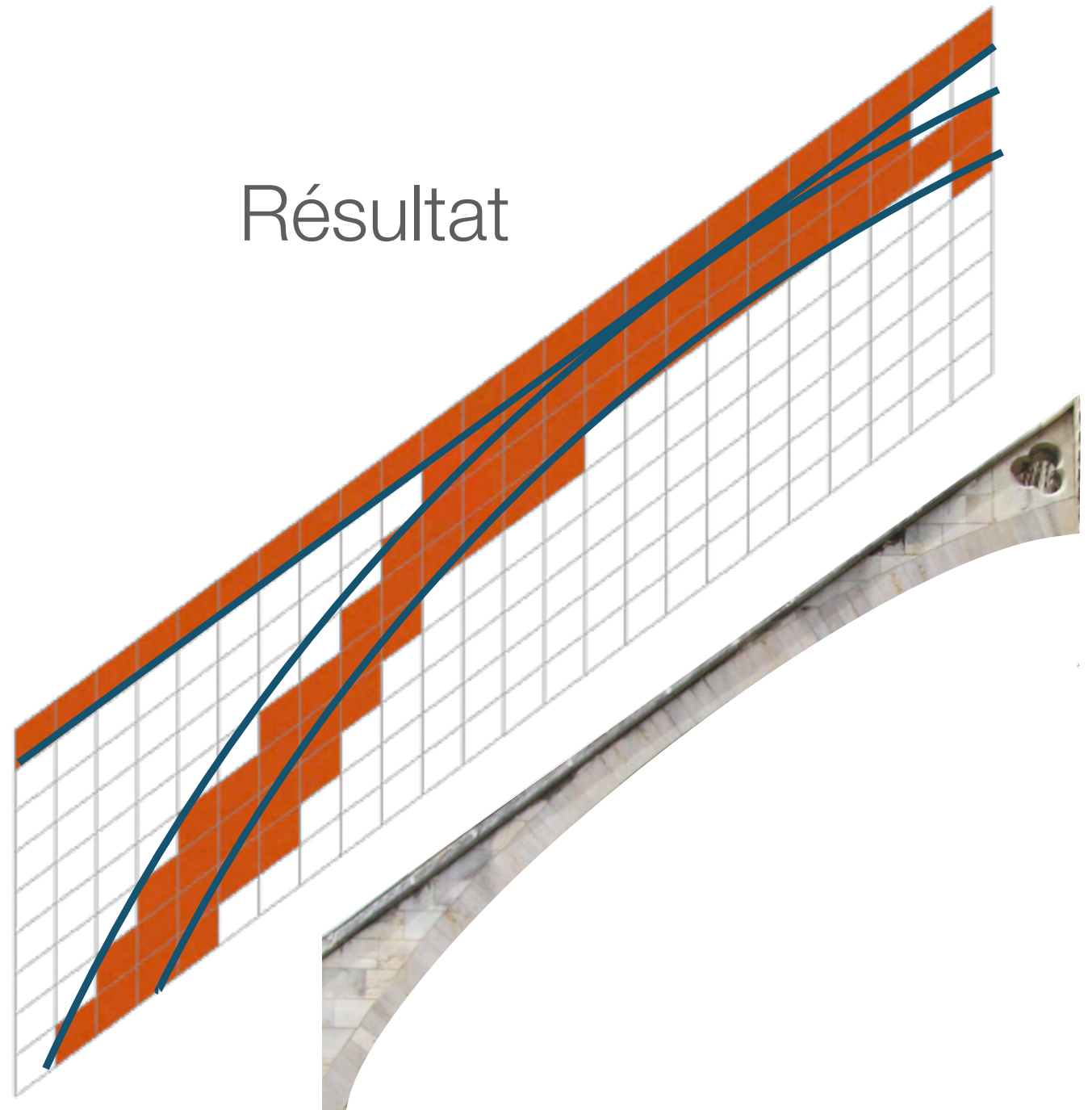


- Cas d'étude: les arcs-boutants du chœur de Notre Dame.



- $E_c = 50 \text{ GPa}$
- $E_t = 10 \text{ GPa}$
- $\nu = 0.25$
- 9 x 24 elements $\approx 0.5 \times 0.5 \text{ m}$

Résultat



- Le résultat montre que probablement l'idée était d'utiliser l'arc boutant comme **support à l'extrados** plat en pierre, qui travaille en compression.

La charpente de Notre Dame

- L'ancienne charpente de Notre Dame était un chef d'oeuvre du **XIII siècle**
- Les sources historiques ne nous renseignent pas sur ces structures
- C'est la raison d'une recherche récente:
 - comment fonctionnait cette structure?
 - quelle était la **conception structurale** de ses bâtisseurs?
- Bien que cette structure ait reçu, même avant l'incendie, une grande attention de la part de historiens, ce type d'étude **manquait encore** (J Cult Herit, 2021, TEMA, 2022)

Les trois charpentes

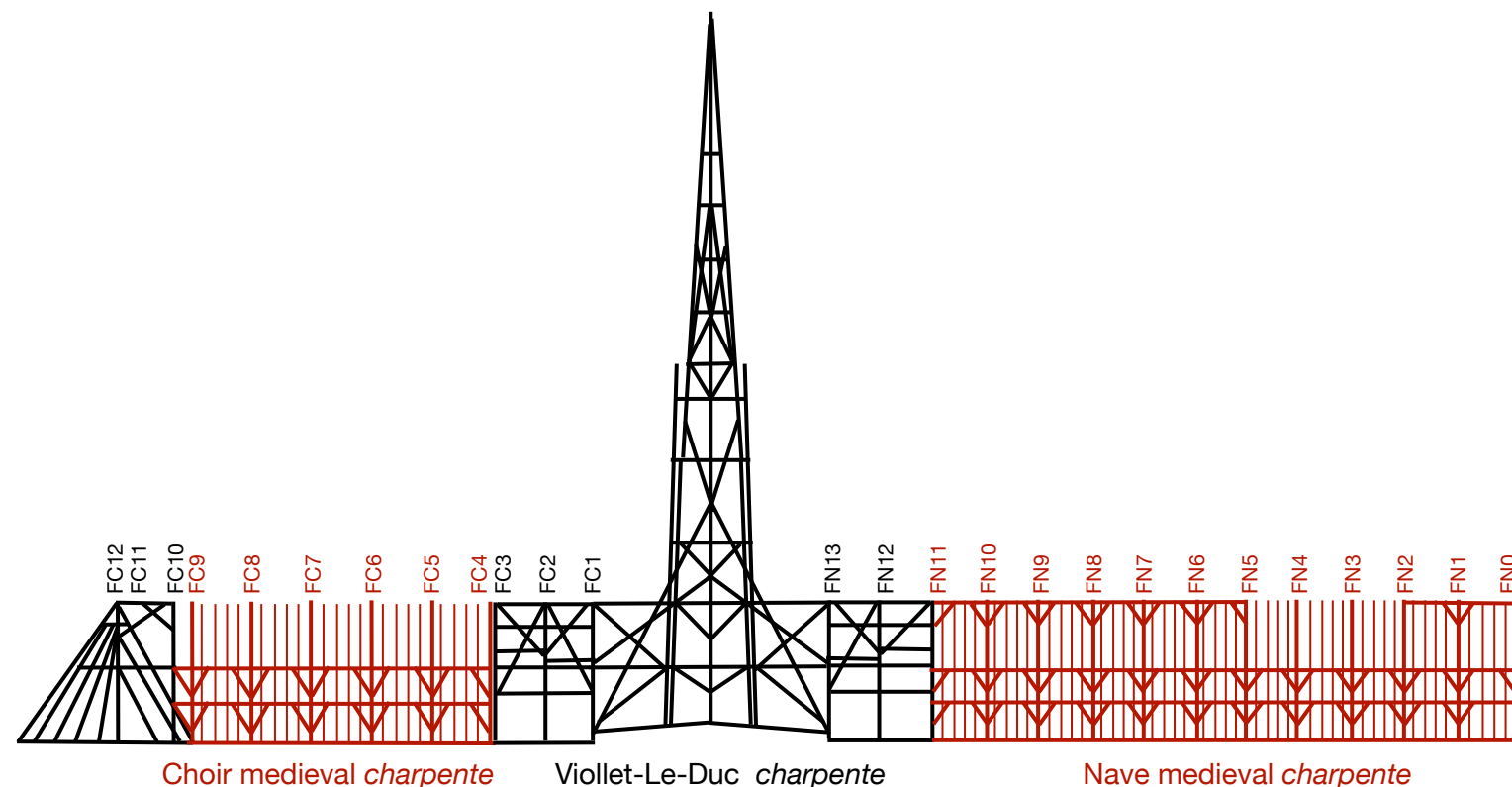
- Charpente d'origine remplacée après 1220 (incendie en 1218? En tout cas, changement de la structure)

- Trois charpentes:

A. chœur ~1225-30

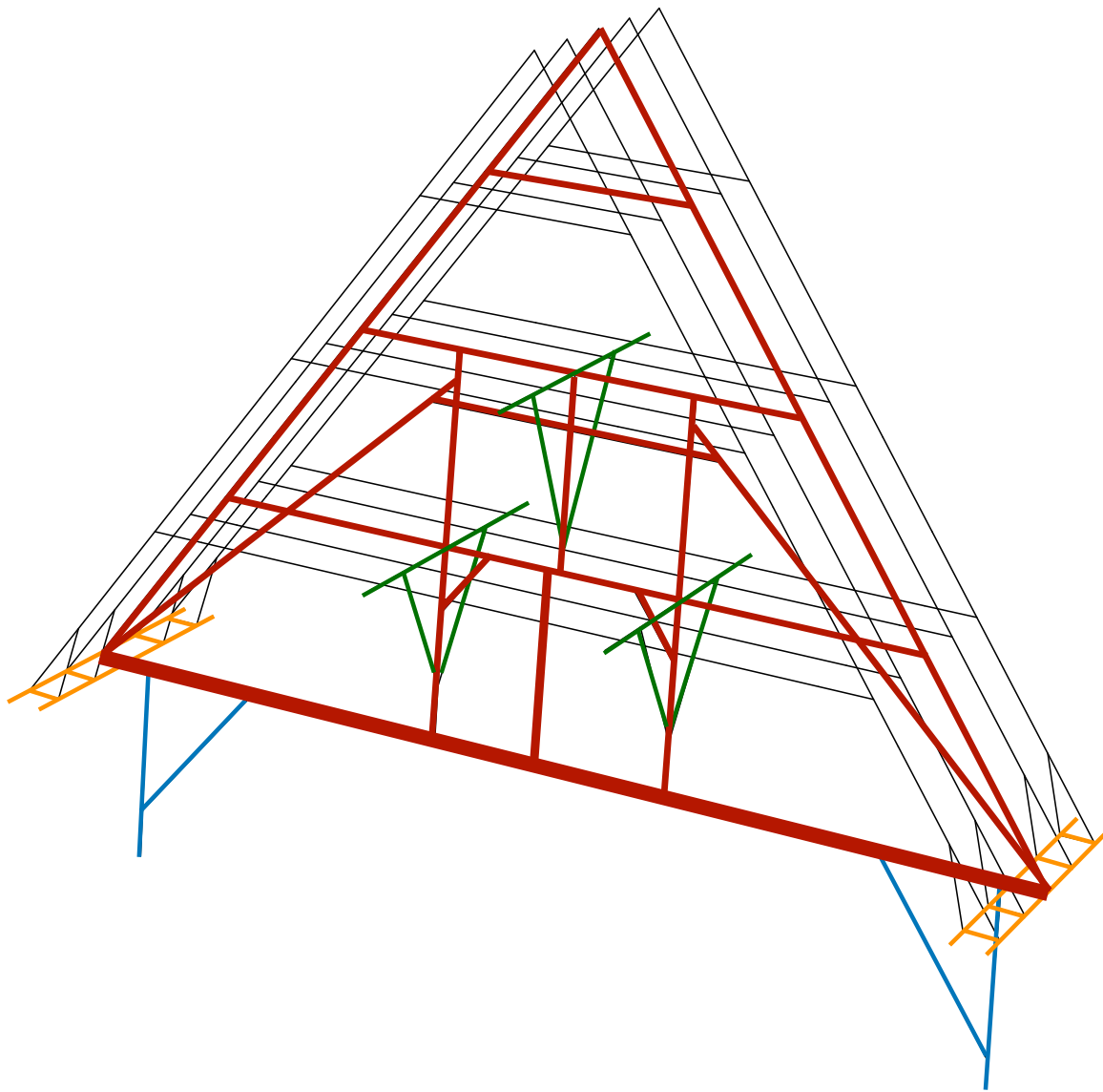
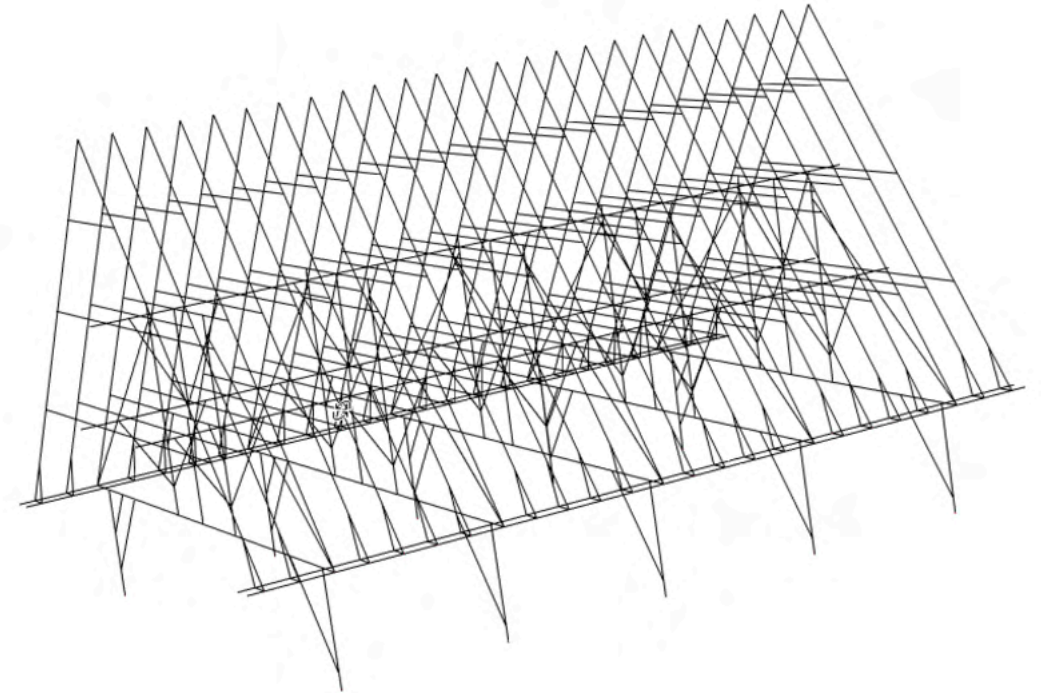
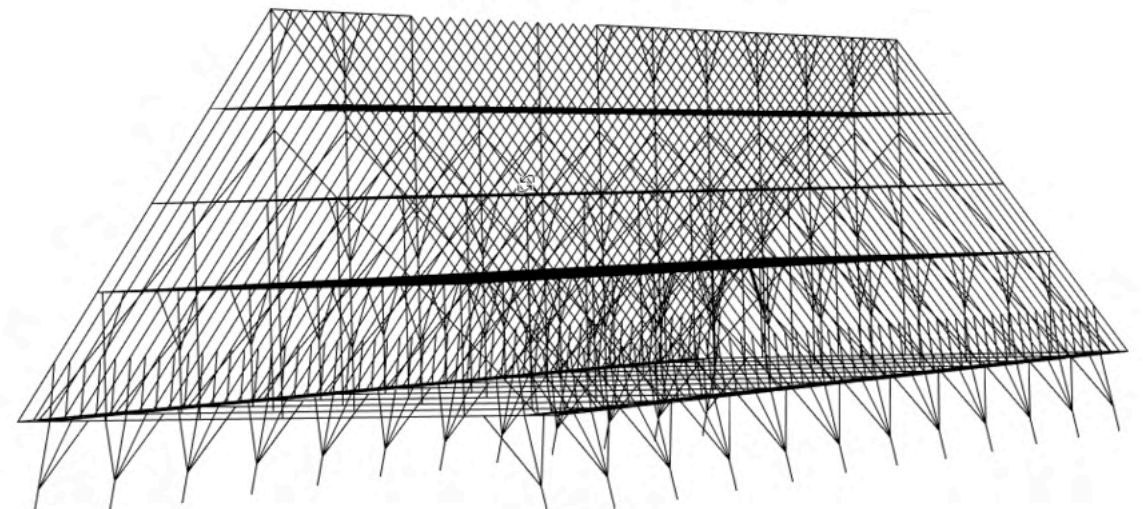
B. nef ~1230-40

C. transept ~1843 (Viollet-le-Duc et Lassus)



Charpentes à chevrons formant ferme

- Composition d'une unité structurale: 1 ferme principale + 4 fermettes + jambes + sablières + contreventement



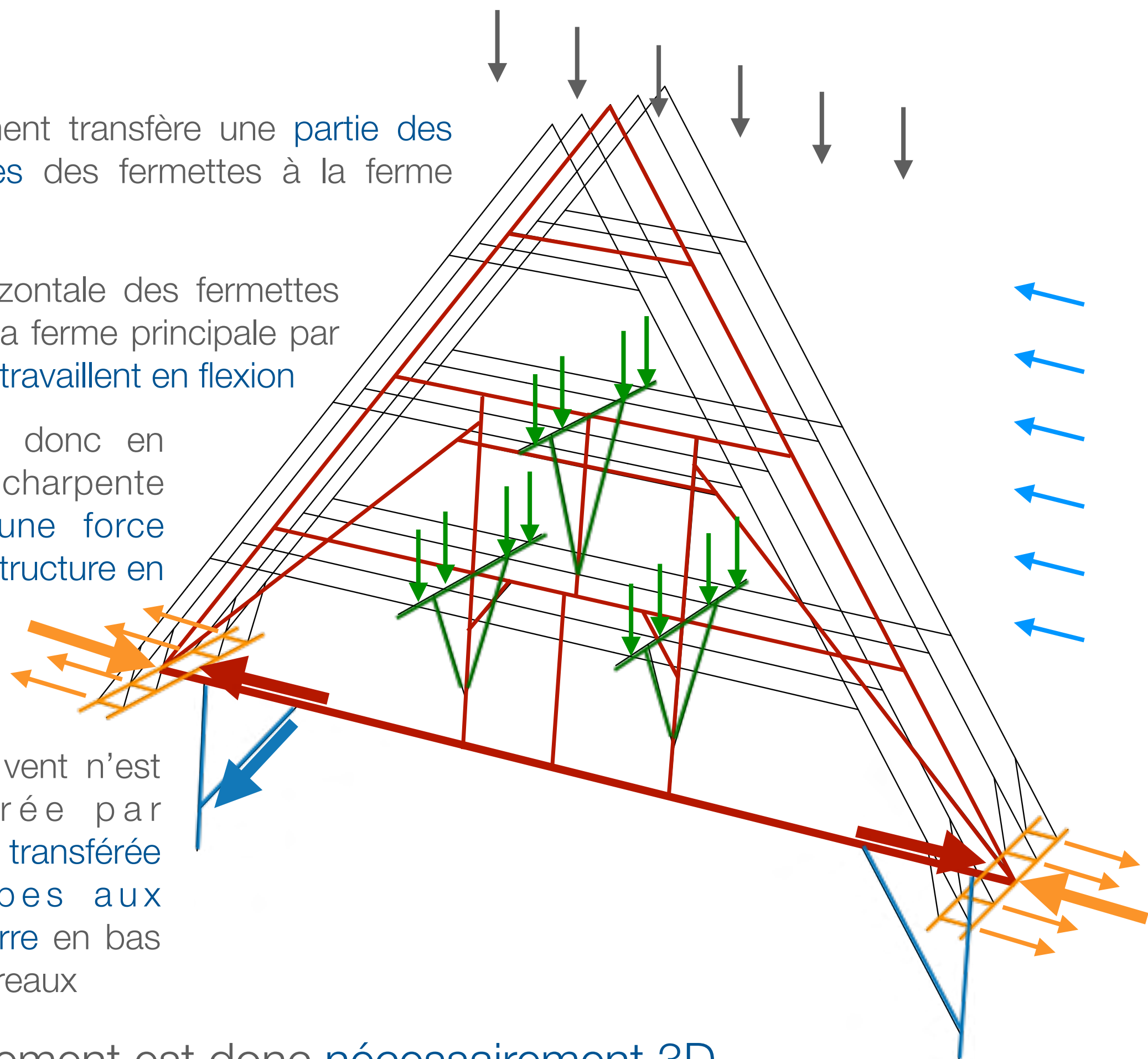
- Le contreventement transfère une **partie des charges verticales** des fermettes à la ferme principale

- La poussée horizontale des fermettes est transférée à la ferme principale par les sablières, qui **travaillent en flexion**

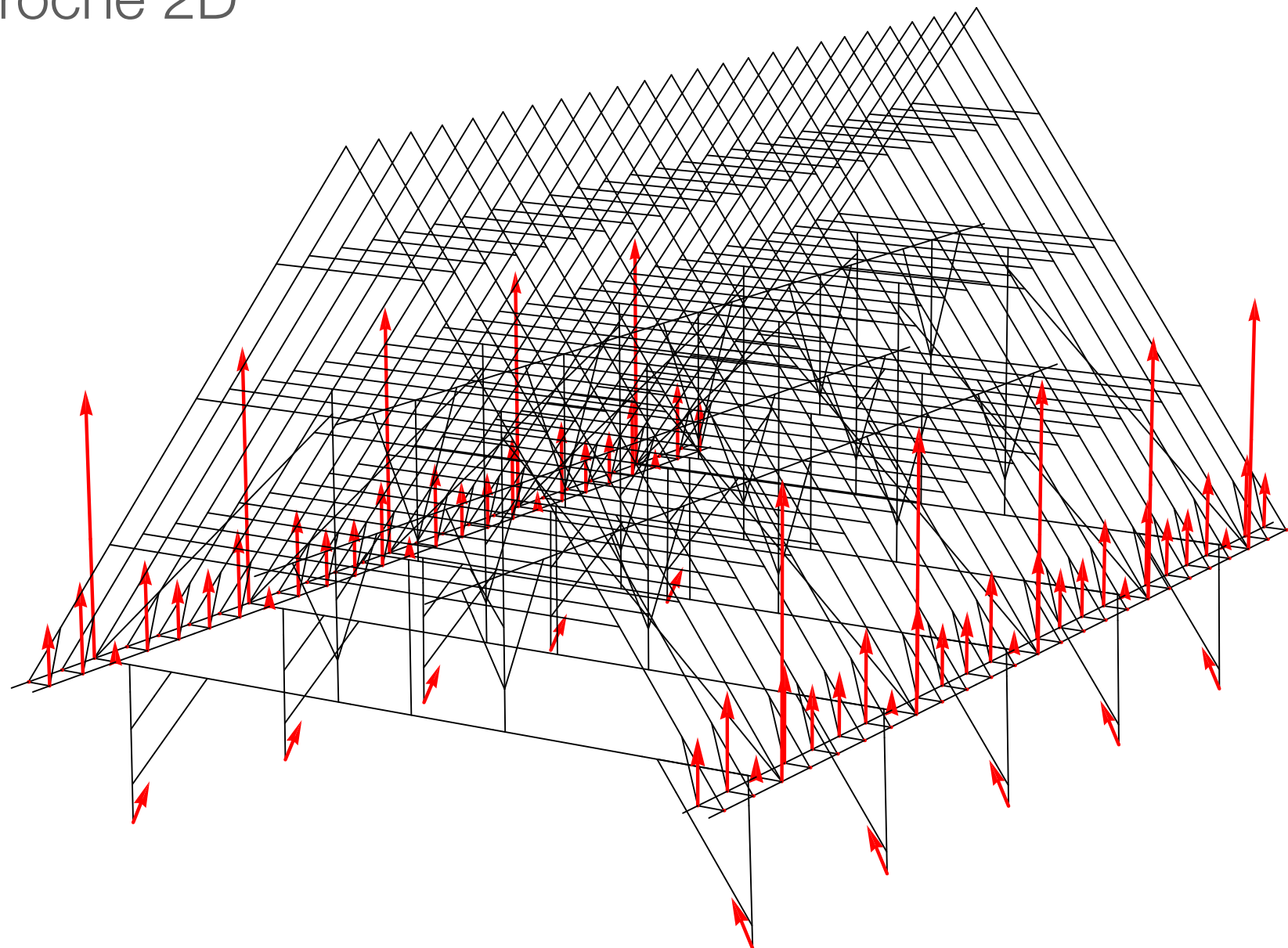
- L'entrait travaille donc en traction et la charpente **n'applique aucune force horizontale** à la structure en pierre

- La poussée du vent n'est pas équilibrée par frottement, mais **transférée par les jambes aux corbeaux en pierre** en bas des murs gouttereaux

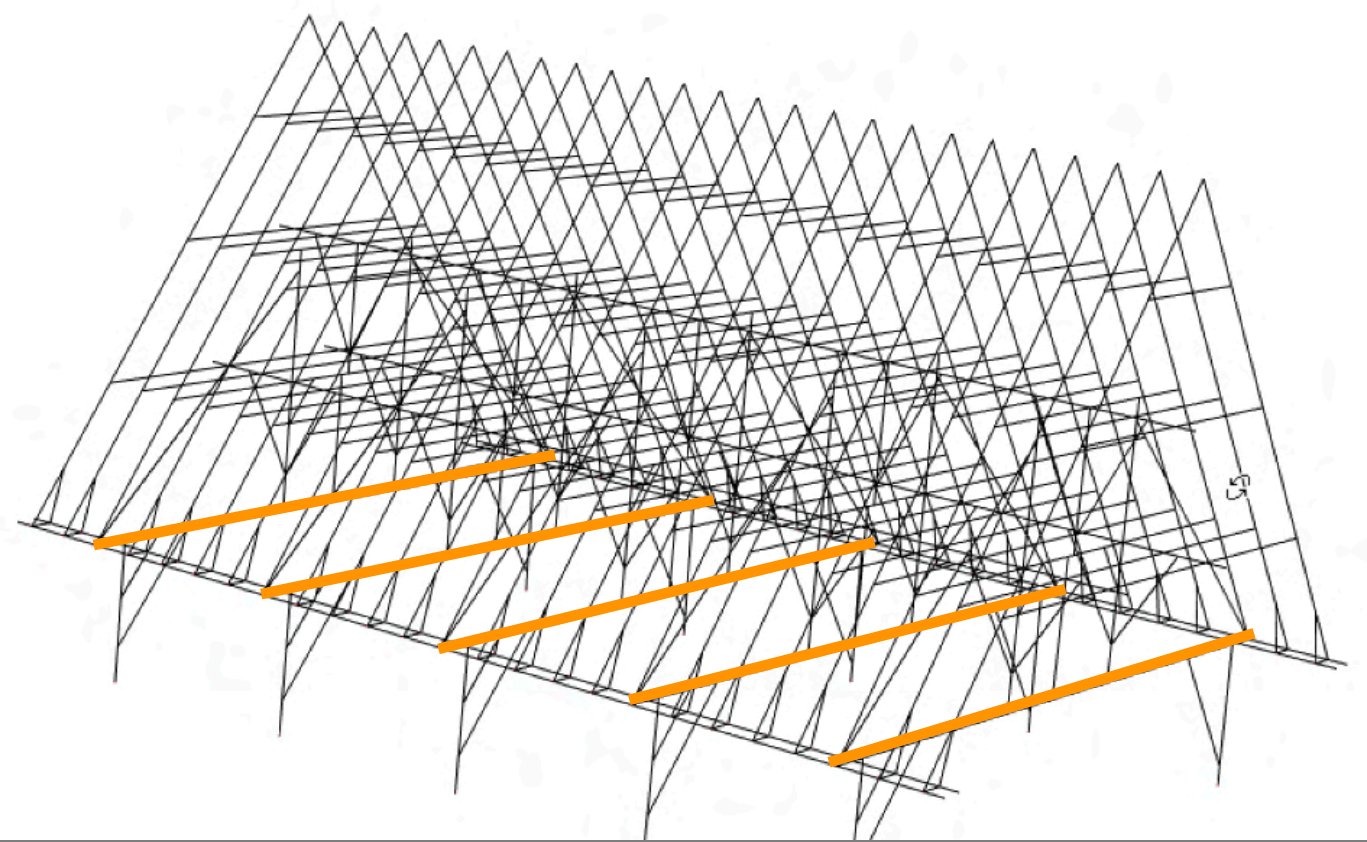
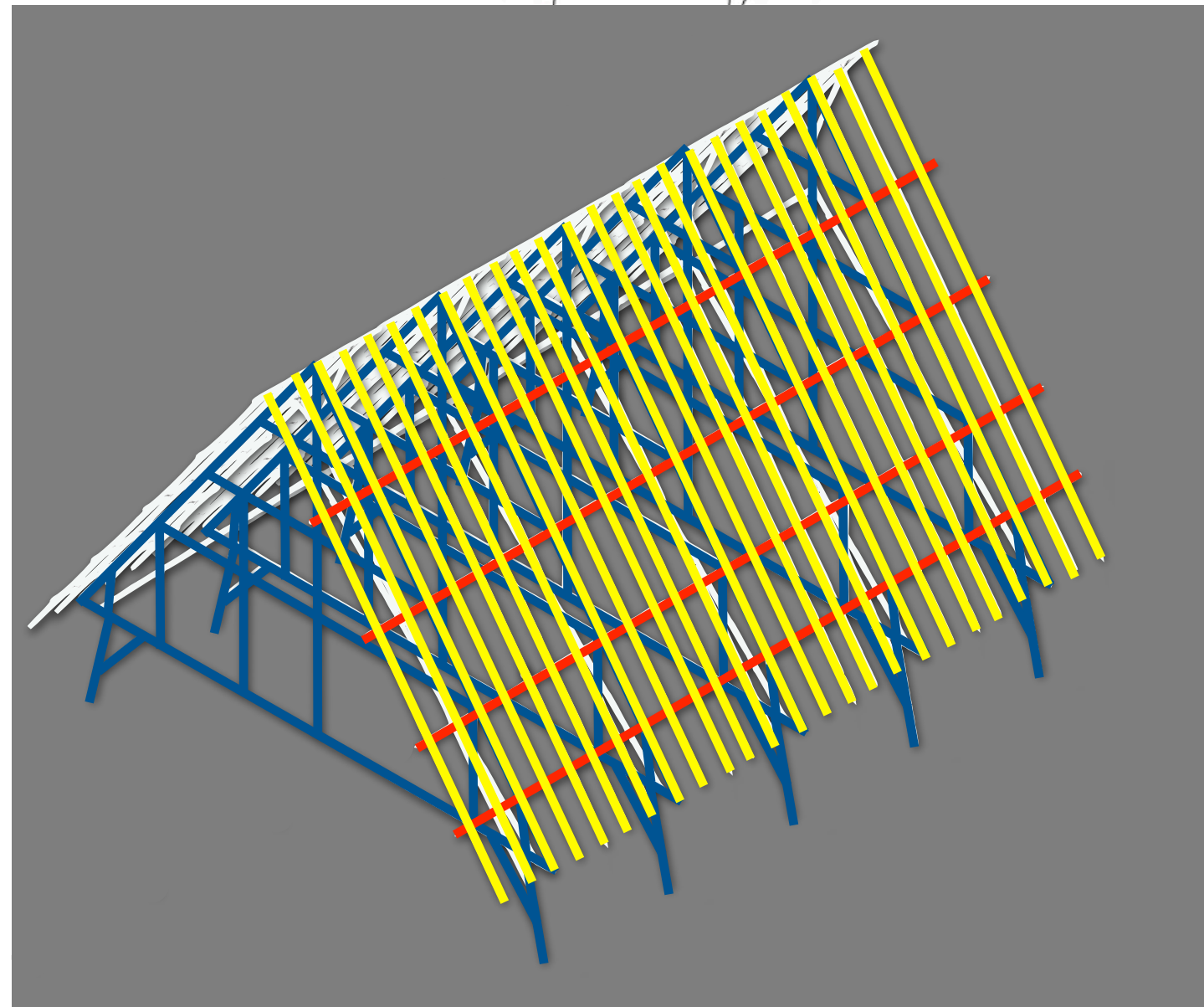
- Le fonctionnement est donc **nécessairement 3D**



- La simulation permet de confuter certains a priori et fausses idées et de mieux comprendre la pensée structurale des bâtisseurs
- Les résultats montrent en fait que le système à chevrons formant ferme **ne distribue pas uniformément la charge** sur la structure en pierre
- Cette croyance, fausse, était inspirée par des questions idéologiques et une approche 2D

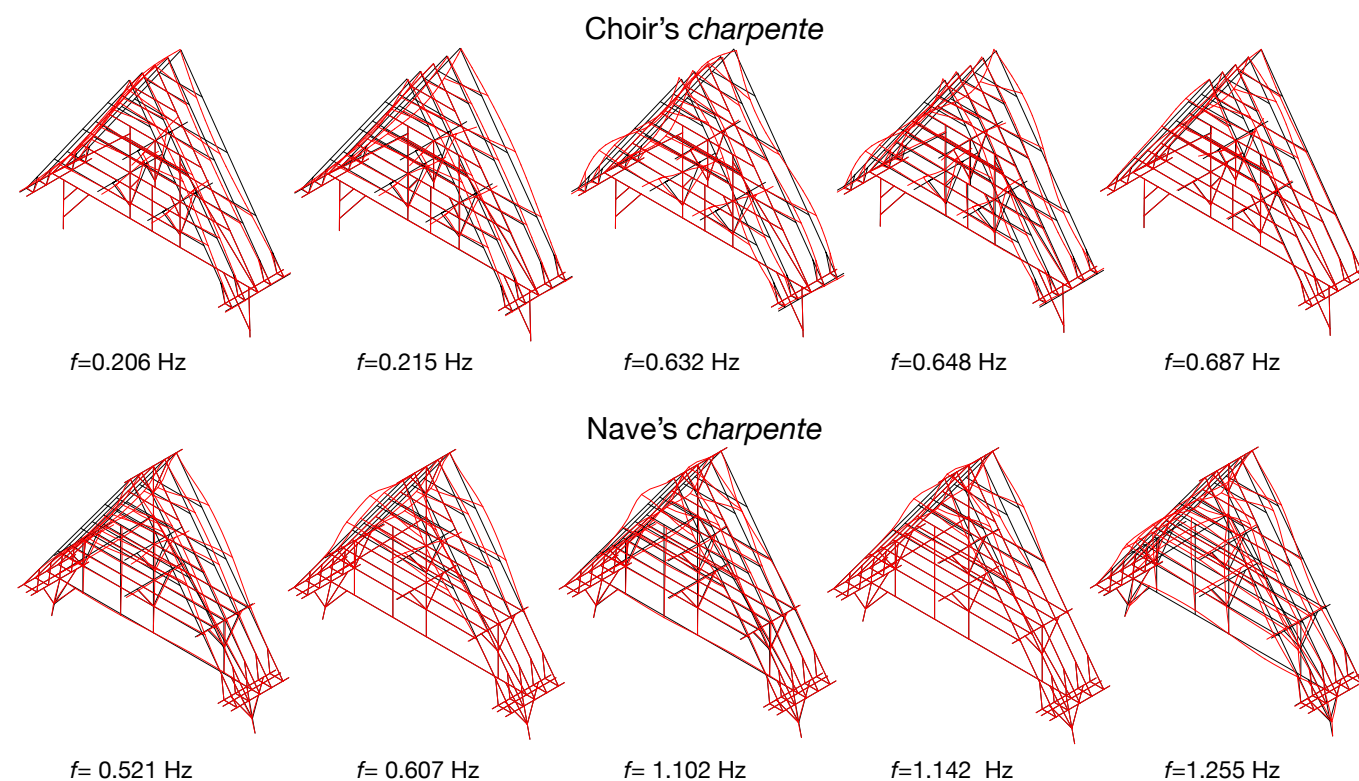
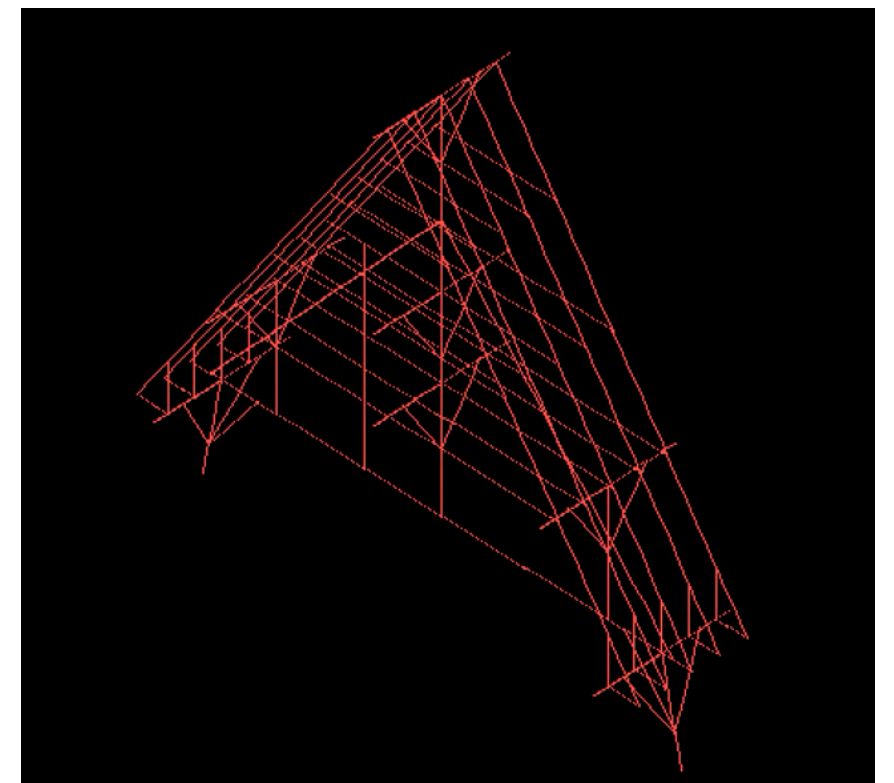


- La question est: pourquoi ce type de structure?
- La simulation permet de voir que pour les charpentes traditionnelles il faut un nombre beaucoup plus grand d'arbres de diamètre $> \sim 40$ cm (~ 65 au lieu de 21)
- Les charpentes à chevron formant ferme peuvent se réaliser avec des arbres de plus petites dimensions, disponibles en plus grande quantité
- La solution trouvée par les gothiques est donc une réponse à un problème écologique: la déforestation de la France du moyen âge



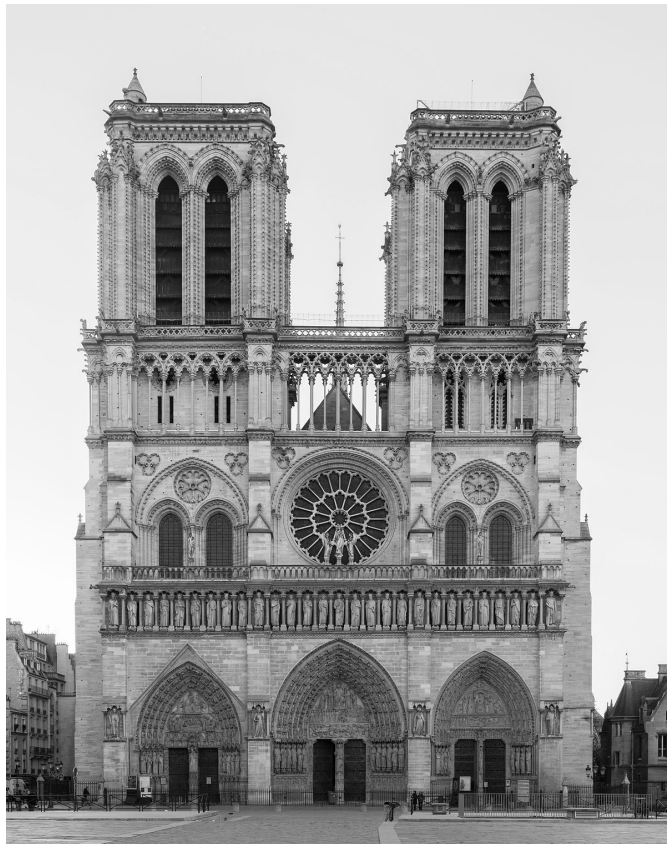
Les schémas statiques

- Le changement de schéma entre la charpente du chœur et celle de la nef montre une **maturation de la perception structurale**: la rigidité est plus forte, pour un poids équivalent
- Ce fait est confirmé aussi per une analyse dynamique: la **fréquence de vibration** de la nef est sensiblement plus forte de celle du chœur
- Une meilleure conception en rigidité est concevable sur la base de l'expérience



Conclusion

- La mécanique et ses outils de simulation sont aujourd'hui un partenaire incontournables des études sur le patrimoine, à la fois pour:
 - la préservation des monuments
 - leur mise en sécurité
 - la compréhension de la pensée des anciens bâtisseurs



Merci pour votre attention